



دانلود جزوه و کتاب

t.me/FUM_Jozve

فصل اول

تابع

تمرین صفحه 42

(1) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \geq 0\} \Rightarrow \text{حل:}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 21}}$

$$x^2 - 5x + 21 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} + \frac{59}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{59}{4} > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad \text{حل:}$$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

$$D_f = (0, +\infty) \quad \text{حل:}$$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}} \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 2}} \Rightarrow x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

7) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2 + 2x + 1)(-x^2 + x - 1)}{x^2 - 5x + 6}}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^2(-x^2+x-1)}{(x-2)(x-3)}}$$

$$(x+1)^2 \geq 0, \quad -x^2+x-1 < 0 \Rightarrow \text{صورت کسر} \leq 0$$

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $2 < x < 3$.

$$\Rightarrow D_f = (2, 3)$$

$$9) \quad f(x) = \sqrt[4]{x^2-5x+6} \Rightarrow x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

$$10) \quad f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1} \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$$

$$11) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}} \Rightarrow x \neq |x| \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

$$12) \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

2) دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$R_f = \{-1, 1\}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \Rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow R_f = R - \{0\}$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow D_f = R - \{1\}, R_f = \{1\}$$

$$4) \quad f(x) = \{-x+3 \mid x > 1\} \Rightarrow D_f = (-\infty, +\infty)$$

چون تابع روی $[-\infty, 1]$ صعودی است برد در این قسمت برابر $[-\infty, 1]$ است و

و چون تابع روی $(1, +\infty)$ نزولی است برد در این قسمت برابر

$$(-\infty, -1+3) = (-\infty, 2)$$

است. پس برد تابع اجتماع این دو مجموعه است که برابر مجموعه زیر است:

$$R_f = (-\infty, 2)$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

$$R_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$6) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Rightarrow D_f = R - \{2\}$$

$$\Rightarrow x \in D_f \Rightarrow f(x) = x + 2$$

$$R_f = R - \{4\}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} -x+5 & x > 4 \\ -\sqrt{16-x^2} & -4 < x < 4 \\ x+5 & x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - \{4\}$$

$$f_1 = -x+5, \quad x > 4 \Rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 1)$$

$$f_2 = -\sqrt{16-x^2}, \quad -4 < x < 4 \Rightarrow R_{f_2} = [-4, 0]$$

$$f_3 = x+5, \quad x \leq -4 \Rightarrow R_{f_3} = [0, -\infty]$$

$$\Rightarrow R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2} \cup R_{f_3} = (-\infty, 1) \cup [-4, 0] = (-\infty, 1)$$

$$8) \quad f(x) = \sqrt{x - |x|}$$

چون همواره داریم $x \leq |x|$ در نتیجه $x - |x| \leq 0$ پس جاهایی که $|x| = x$ است قابل

قبول است یعنی $D_f = [0, +\infty)$.

$$x \in D_f \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x} = 0 \Rightarrow R_f = \{0\}$$

(3) از جفت توابع زیر کدام یک مساوی هستند؟

فصل دوم: حد و پیوستگی

۵

$$f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1 \quad (1)$$

مساوی نیستند چون $D_g = R$ و $D_f = R - \{0\}$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \text{ و } g(x) = x \quad (2)$$

مساوی نیستند چون $D_g = R$ و $D_f = [0, +\infty)$ با هم برابر نیستند.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ و } g(x) = x + 2 \quad (3)$$

با هم برابر نیستند.

(4) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-1}$ مطلوب است. $f(1)$ ، $f(x+1)$ و $f(x^2-1)$ و $f(f(2))$.

$$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$f(x+1) = \sqrt{x+1-1} = \sqrt{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

$$f(x^2-1) = \sqrt{x^2-1-1} = \sqrt{x^2-2}$$

$$f(f(2)) = f(\sqrt{2-1}) = f(1) = 0$$

(5) اگر f تابعی باشد که به ازای هر x و y ، $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1) \neq 0$ باشد. مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را بیابید.

حل:

$$f(n) = f(1+1+1+\dots+1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) \\ = n f(1)$$

$$\Rightarrow \frac{f(n)}{f(1)} = \frac{nf(1)}{f(1)} = n$$

(6) در هر یک از موارد $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، fog ، gof ، fof ، gog را تعیین کنید.

$$. g(n) = x^2 + 1, \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ (الف)}$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$got(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$fof(x) = f(f(m)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$gog(x) = g(g(x)) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 4 - x^2 \text{ (ب)}$$

$$f + g(x) = \sqrt{x} + 4 - x^2$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{4 - x^2}$$

$$fog(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$gof(x) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$$

$$fof(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$gog(x) = 4 - (4 - x^2)^2 = 4 - (16 - 8x^2 + x^4) = -4 + 8x^2 - x^4$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad (ج)$$

$$f + g(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x-1}$$

$$gof(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x+1}{1-x}$$

$$fof(x) = \frac{\frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1}}{\frac{x+2}{2}} = \frac{x+2}{2}$$

$$gog(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (د)$$

$$f + g(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$gof(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

$$fof(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}$$

$$gog(x) = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

(7) در هر مورد fg و $f-g$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$fg(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ 16 & x \geq 0 \end{cases} \quad f-g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\text{حل: ابتدا } f(x) \text{ را به صورت } f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases} \text{ می نویسیم، داریم:}$$

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

$$\text{و } f-g(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 4x & 1 < x \end{cases} \quad (\text{ب})$$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \end{cases}$ می نویسیم، داریم:

$$fg(x) = \begin{cases} x^4 & x < 0 \\ -4x & 0 \leq x < 1 \\ 16x & 1 < x \end{cases}$$

{S

(ج)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 4 & x \geq 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < -1 \\ x^2 + 1 & -1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x+2} & 2 \leq x \end{cases}$$

حل: دامنه مشترک دو تابع برابر $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ است پس داریم:

$$f - g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 - \frac{1}{x} & x < -1 \\ 4 - \sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

$$fg(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)}{x} & x < -1 \\ 4\sqrt{x+2} & x > 2 \end{cases}$$

(8) توابع f و g به صورت زیر داده شده اند.

$$f: R - \{3\} \rightarrow R$$

$$g: R - \{1\} \rightarrow R$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$g(x) = \frac{3-8x^3}{1-x^3}$$

اولاً ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1+3}{x_1-3}} = \sqrt[3]{\frac{x_2+3}{x_2-3}} \\
 &\Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3} = \frac{x_2+3}{x_2-3} \Rightarrow 1 + \frac{6}{x_1-3} = 1 + \frac{6}{x_2-3} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x_1-3} = \frac{1}{x_2-3} \Rightarrow x_1-3 = x_2-3 \\
 &\Rightarrow x_1 = x_2
 \end{aligned}$$

پس f یک به یک است.ثانیاً آیا f و g وارون یکدیگرند.حل: باید $D_g = R_f$ و $D_f = R_g$ باشد.

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &= \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}} \Rightarrow y^3 = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3} \\
 &\Rightarrow y^3 - 1 = \frac{6}{x-3} \Rightarrow x-3 = \frac{6}{y^3-1} \\
 &\Rightarrow x = 3 + \frac{6}{y^3-1} = \frac{3y^3-3+6}{y^3-1} \\
 &\Rightarrow x = \frac{3y^3+3}{y^3-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x^3+3}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

با این محاسبه مشخص است که $g(x) \neq f^{-1}(x)$ است.

(9) کدام یک از توابع زیر یک به یک و پوشا است؟

$$f(x) = \frac{|x|+1}{x} \quad (1)$$

$$\text{حل) این تابع به صورت } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & x > 0 \\ -\frac{x+1}{x} & x < 0 \end{cases} \text{ است.}$$

هر جزء این تابع یک به یک و پوشاست، چون تابع هموگرافیک است.

$$f: R^+ \rightarrow R, \quad f(x) = |x| + 1 \quad (2)$$

حل: این تابع به صورت $f(x) = x + 1$ است که یک به یک است.

ولی پوشا نیست چون $R_f = (1, +\infty) \neq R$ است.

$$f: R \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt[3]{x} + 2 \quad (3)$$

حل: این تابع یک به یک است چون:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} + 2 &= \sqrt[3]{x_2} + 2 & \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} &= \sqrt[3]{x_2} \\ & & \Rightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

این تابع پوشا نیز است چون:

$$\begin{aligned} y = \sqrt[3]{x} + 2 &\Rightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = (y - 2)^3 \\ &\Rightarrow R_f = R \end{aligned}$$

$$f: R - \{1\} \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad (4)$$

حل: تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ روی دامنه اش حتماً یک به یک است.

این تابع پوشا نیست، چون:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x-1} = y-2 \Rightarrow x-1 = \frac{3}{y-2}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{3}{y-2} = \frac{y+1}{y-2}$$

$$R_f = R - \{2\} \neq R.$$

(10) تابع $f: R - \{1\} \rightarrow R - \{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x) = \frac{2x-2+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x_1-1}$$

$$f(x) = f(x_2) \Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1-1} = 2 + \frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \Rightarrow x_1-1 = x_2-1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشا باشد.

حل: باید $R_f = R - \{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا R_f را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = y-2$$

$$\Rightarrow x-1 = \frac{1}{y-2} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y-2}$$

$$\Rightarrow R_f = R - \{2\} \Rightarrow a = 2$$

11) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1} \quad (\text{الف})$$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x + 2 \Rightarrow x(y-3) = y+2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

$$f(x) = \sqrt{x-4} \quad (\text{ب})$$

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است و داریم:

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2 + 4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x} & 9 < x \end{cases} \quad (\text{ج})$$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون پذیر است:

$$f_1(x) = x, \quad x > 1 \Rightarrow f_1^{-1}(x) = x \quad x > 1$$

$$f_2(x) = x^2, \quad 1 \leq x \leq 9 \Rightarrow f_2^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad 1 \leq x \leq 81$$

$$f_3(x) = 27\sqrt{x}, \quad x > 9 \Rightarrow f_3^{-1}(x) = \frac{x^2}{(27)^2} \quad x > 81$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 81 \\ \left(\frac{x}{27}\right)^2 & x > 81 \end{cases}$$

فصل دوم

حد و پیوستگی

1. همسایگی‌های زیر را به صورت مجموعه بنویسید. پس آنها را روی یک خط نشان دهید.

الف) $N(1, \frac{1}{2}) = \left\{ x \mid \left| x - 1 \right| < \frac{1}{2} \right\}$

ب) $N(0, 3) = \{x \mid |x| < 3\}$

ج) $N'(1, 3) = \{x \mid |x - 1| \leq 3\}$

د) $N'(1, 5) = \{x \mid |x - 1| \leq 5\}$

2) مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 1\}$ یک همسایگی متقارن a به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل:

$$|2x + 3| = 2 \left| x + \frac{3}{2} \right| = 2 \left| x - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < 1$$

$$\Rightarrow \left| x - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \quad r = \frac{1}{2}$$

مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 1| < |x + 1|\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع r است. a و r را تعیین کنید.

حل:

$$|3x - 1| < |x + 1| \Rightarrow \frac{|3x - 1|}{|x + 1|} < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3x - 1}{x + 1} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{3x - 1}{x + 1} < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 3 - \frac{4}{x+1} < 1 \Rightarrow 3 - \frac{4}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow 2 < \frac{4}{x+1} \Rightarrow 1 < \frac{2}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{1-x}{x+1}$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

$$-1 < 3 - \frac{4}{x+1} - 4 < \frac{-4}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-x}{x+1} < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$(-1, 1) \cup (-1, 0) = (-1, 1)$$

$$\text{جواب} = \quad a = 0, \quad r = 1$$

اگر $(2a-4, a+2)$ یک همسایگی متقارن 5 باشد. شعاع همسایگی را تعیین کنید:

حل:

$$N(5, 7) = (2a-4, a+2)$$

$$\Rightarrow (5-7, 5+r) = (2a-4, a+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5-r = 2a-4 \\ 5+r = a+2 \end{cases} \Rightarrow 10 = 3a-2 \Rightarrow a = 4$$

$$r = 1$$

5) مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| < 6\}$ یک همسایگی a به شعاع 4 است.

a و r را تعیین کنید:

$$|2x+3| < 6 \Rightarrow 2\left|x + \frac{3}{2}\right| < 6 \Rightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| < 3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, r = 3$$

٤ حل المسائل رياضي عمومي (١)

تمرین. 6-2-2 صفحه 63

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (5x + 4) = 9 \quad |5x + 4 - 9| = 5|x - 1| < 4$$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{4}{5}$$

پس قرار می دهیم $d \leq \frac{e}{5}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} (3x + 2) = -4$$

$$|3x + 2 + 4| = 3|x + 2| < 4 \Rightarrow |x + 2| < \frac{4}{3}$$

قرار می دهیم $d \leq \frac{e}{3}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$|x^2 - 4| = |x + 2||x - 2|$$

ماکزیمم $|x + 2|$ را در همسایگی $-1 < x - 2 < 1$ به دست می آوریم.

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow \max(x + 2) = 5$$

$$\Rightarrow |x^2 - 4| \leq 5|x - 2| < 4$$

کافی است $d \leq \min\left\{1, \frac{e}{5}\right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \quad |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

ماکزیمم $|x - 2|$ را در همسایگی زیر می یابیم.

فصل دوم: حد و پیوستگی

$$-1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow \max |x-2| = 3$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{3} \right\}$ را در نظر بگیریم.

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\left| \frac{3x+1}{x+2} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{9x+3-4x-8}{x+2} \right| = \frac{5|x-1|}{|x+2|}$$

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \max \frac{5}{|x+2|} = \frac{5}{2}$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{5} \right\}$ را در نظر بگیریم.

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{5x-8} = 3$$

$$\left| \frac{x^2+2}{5x-8} - 3 \right| = \left| \frac{x^2+2-15x+24}{5x-8} \right| = \frac{|x-13||x-2|}{|5x-8|}$$

$$-1 < x-2 < 1 \quad 1 < x < 3$$

ماکزیمم روی این بازه به علت صعودی بودن برابر است با: $\left| \frac{x-13}{5x-8} \right|$

$$\left| \frac{3-13}{15-8} \right| = \left| \frac{-10}{7} \right| = \frac{10}{7}$$

پس کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{10} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} = 1$$

$$\left| \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \left| \frac{x^2 - 3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x + 3} \right| = \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} |x - 2|$$

$$-1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

تابع $x^2 - 3x + 3$ می‌بینیم خود را در $x = \frac{3}{2}$ دریافت می‌کند پس:

$$\max \frac{3}{|x^2 - 3x + 3|} = \frac{3}{(\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2}) + 3} = \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 3} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

پس کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{4} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 \leq 0$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x \Rightarrow x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 < -x \Rightarrow \left| x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1 \right| < |x|$$

اگر $d \leq e$ باشد مسئله حل است.

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{(x-3)(x+3)}{x^2 + 3} \right| = \frac{|x+3|}{x^2 + 3} |x-3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4$$

$$\max \left\{ \frac{x+3}{x^2 + 3} \right\} = \frac{7}{4+3} = 1$$

پس کافی است $d \leq \min \{1, e\}$ در نظر گرفته شود.

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 10x) = -21$$

$$|x^2 - 10x + 21| = |x - 7| |x - 3|$$

$$-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow \max |x - 7| = |4 - 7| = 3$$

کافی است $d \leq \min \left\{ 1, \frac{e}{3} \right\}$ در نظر گرفته شود.

$$11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = 7$$

$$\left| \frac{x^2 - 2}{x - 2} - 7 \right| = \left| \frac{x^2 - 2 - 7x + 14}{x - 2} \right| = \frac{|x - 4| |x - 3|}{|x - 2|}$$

$$-1 < x - 4 < 1 \Rightarrow 3 < x < 5$$

$$\max \frac{|x - 3|}{|x - 2|} = \frac{|5 - 3|}{|5 - 2|} = \frac{2}{3}$$

پس قرار می‌دهیم $d \leq \min \left\{ 1, \frac{3}{2} e \right\}$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{5x - 3} = \frac{3}{2}$$

$$\left| \frac{4x - 1}{5x - 3} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{8x - 2 - 15x + 9}{5x - 3} \right| = \frac{7}{|5x - 3|} |x - 1|$$

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{7}{|5x - 3|} = \frac{7}{|0 - 3|} = \frac{7}{3}$$

پس $d \leq \min \left\{ 1, \frac{3}{7} e \right\}$ را در نظر می‌گیریم.

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$$

$$\left| (-1)^{[x]} \frac{x^2 - 4}{x + 2} - 0 \right| = |x - 2|$$

کافی است $d = e$ در نظر گرفته شود.

$$14) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$$

$$\left| \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{3 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \right|$$

$$= \frac{|x - 9|}{(\sqrt{x} + 3)^2}$$

$$-1 < x - 9 < 1 \Rightarrow 8 < x < 10$$

$$\max \frac{1}{(\sqrt{x} + 3)^2} = \frac{1}{(\sqrt{8} + 10)^2}$$

کافی است $d \leq \min \{1, (\sqrt{8} + 10)^2 e\}$ در نظر گرفته شود.

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{x - 3} = 2$$

$$\left| \frac{2}{x - 3} - 2 \right| = \left| \frac{2 - 2x + 6}{x - 3} \right| = \frac{2|x - 4|}{|x - 3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x - 4 < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$$

$$\max \frac{2}{|x - 3|} = \frac{2}{\left| \frac{7}{2} - 3 \right|} = 4$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, e \right\} \text{ پس}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x-1} = 3$$

$$\left| \frac{2x+1}{2x-1} - 3 \right| = \left| \frac{2x+1-6x+3}{2x-1} \right| = \frac{4}{|2x-1|} |x-1|$$

$$-\frac{1}{4} < x-1 < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \max \frac{4}{|2x-1|} = \frac{4}{\left| 2\left(\frac{3}{4}\right) - 1 \right|} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$d \leq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{e}{8} \right\} \text{ پس}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x}{x-3} = 2$$

$$\left| \frac{x}{x-3} - 2 \right| = \left| \frac{x-2x+6}{x-3} \right| = \frac{|x-6|}{|x-3|}$$

$$-1 < x-6 < 1 \quad \Rightarrow \quad 5 < x < 7$$

$$\Rightarrow \max \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{|5-3|} = \frac{1}{2}$$

$$d \leq \min\{1, 2e\} \text{ پس}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+3} = -1$$

$$\left| \frac{1}{x+3} + 1 \right| = \left| \frac{x+4}{x+3} \right| = \frac{|x+4|}{|x+3|}$$

$$-\frac{1}{2} < x+4 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < -\frac{7}{2}$$

$$\max \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{\left| -\frac{9}{2} + 3 \right|} = \frac{2}{3}$$

$$d \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}e\right\} \text{ پس}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5-x}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - \sqrt{5-x}}{\sqrt{5-x}} \right| = \left| \frac{(2 - \sqrt{5-x})(2 + \sqrt{5-x})}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})}$$

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\max \frac{1}{2\sqrt{5-x}(2 + \sqrt{5-x})} = \frac{1}{2\sqrt{5-2}(2 + \sqrt{5-2})}$$

$$d \leq \min\left\{\frac{1}{2}, (2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}))e\right\} \text{ پس}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$$

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x + 4} + 8 \right| = \left| \frac{x^2 - 16 + 8x + 32}{x + 4} \right| = \left| \frac{(x+4)^2}{x+4} \right|$$

$$= |x+4|$$

کافی است $d = e$.

تمرین 2-3-29 صفحه 80.

حدهای زیر را حساب کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x - \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{-1-2}{-1 - \sqrt{-1+2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(x+1)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-10)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-10}{x+2} = \frac{-11}{1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 19x - 20}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+20)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+20}{x+1} = \frac{21}{2}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{3} + 3)(x+9)}{\sqrt{x} - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} + 3)(x+9) = 108\{
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+2)(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x-2} + 1)} = \frac{1}{5 \times 2} = \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - x + 2)}{(x^0 - 2)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = \frac{8}{-4} = -2
 \end{aligned}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x+1} = 2$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 4x + 3}{x^{15} - 5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - x - 3x + 3}{x^{15} - x - 4x + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{19} - 1) - 3(x - 1)}{x(x^{14} - 1) - 4(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1) - 3)}{(x - 1)(x(x^{13} + x^{12} + \dots + x + 1) - 4)} \\
 &= \frac{19 - 3}{14 - 4} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1 + x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1 + x)}{(x^2 - 1)(x + 3)} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{3}{2}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{2}{3}$$

تمرین صفحه 106

حد هر يك از توابع زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} [x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$$

تابع حد ندارد. $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} [2x + 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [2x + 1] = 3$$

تابع حد ندارد. $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [2x + 1] = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} [3 - 2x] = 3 + \lim_{x \rightarrow 1} [-2x]$$

حد ندارد. $\Rightarrow$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{5-x} \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{x-2} = \frac{(-1)^1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{x-2} = \frac{(-1)^0}{1-2} = \frac{1}{-2} = -1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - |2-x| - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - (2-x) - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = 2$$

$$8) \lim \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim \frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x - 2}} = 0 \quad (\text{کراندار در حد صفر})$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} (x - [x]) \quad \Rightarrow \text{حد وجود ندارد.}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x[x]}{2x + |x|} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{0}{2x + x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x[x]}{2x + |x|} = \frac{-4x}{2x - x} = -4 \quad \Rightarrow \text{حد ندارد.}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[4]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^2} + \sqrt[4]{(x+1)} + 1)}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1)} = \frac{4}{3}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{2}}{\frac{x^2}{2} \cdot 1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{8}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{\cos^3 x} - \sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}(\sqrt[6]{\cos x} - 1)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^6 x} + \dots + \sqrt[6]{\cos x} + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) \frac{\sin(1-x)}{x-1} = -2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$$

$$1-x = t \Rightarrow x = 1-t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t \operatorname{tg} \frac{p}{2} (1-t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \frac{p}{2} t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{p}{2} t} \cdot \cos \frac{p}{2} t = \frac{2}{p}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg} \left(\frac{p}{4} - x \right) = 0 \times -1 = 0$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{x^2}{2} + x)^n - (1 + \frac{x^2}{2} - x)^n}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{x} = 2n$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1}{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2) = 2 - 2 = 0$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} ((-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}) = 0 \quad (\text{تابع کراندار در تابع با حد صفر ضرب شده})$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{[x]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$$= \sqrt[3]{64} + 2\sqrt[3]{8} + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

صفحه 127

$$27) \quad (a \neq 1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

$$28) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 - 1| + 3(1 - x^2)[x - 1]}{x - 1} \quad \text{حد وجود ندارد.}$$

$$29) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cos \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$31) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$32) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 2}{|x - 2| + [x - 2]} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x - 1)}{-(x - 2) - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$33) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$34) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arcty} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arcty} \frac{1}{0^+} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{Arcty}(+\infty) = \frac{p}{2}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arctg} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arctg} \frac{1}{0^-} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{Arctg} (-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arc} \cos(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{x}{2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{4}$$

2-4-32 تمرین صفحه 108

(1) ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

حل: با توجه به نامساوی $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ و با استفاده از قضیه فشردگی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ است پس } 0 = \lim_{x \rightarrow a} -|f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |f(0)|$$

(2) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=1$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x < 1 \\ [x] - a, & x \geq 1 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+4) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a) = 1 - a$$

$$\Rightarrow 1 - a = 7 \quad a = -6$$

(3) فرض کنید $x < -1$ و $x > -1$ ، مقادیر a و b را طوری تعیین کنید $f(x) = \begin{cases} ax+b & x < -1 \\ x^2-b & x > -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ که}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - b) = 1 - b = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax + b) = -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

$$(4) \text{ فرض کنید: } f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x < 3 \\ b - q x & 3 < x \end{cases}$$

و a و b را طوری تعیین کنید که

$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ موجود باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b = -15 \\ -2a + 2b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ -a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow 2b = -8$$

$$\Rightarrow b = -4 \quad a = -1$$

$$(5) \text{ فرض کنید } F(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x \leq 1 \\ x + 1 & , x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x & , x > 1 \end{cases}$$

نشان دهید، این توابع در $x = 1$ حد ندارند ولی تابع $f(x)g(x)$ در $x = 1$ حد دارد.

حل.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$\Rightarrow$ حد ندارد f

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$\Rightarrow$ حد ندارد g

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$$

تابع $f(x)g(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f(x).g(x) = \begin{cases} x^2(x^2 + 3) & , x \leq 1 \\ 2(x+1) & , x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2(x^2 + 3) = 4$$

$\Rightarrow$ تابع حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x+1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} x(x^2 - 2) \text{ مقدار } f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} \quad (6) \text{ فرض کنید}$$

را حساب کنید.

حل) چون $f(x^2 - 2) = 1$ است. پس

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (x f(x^2 - 2)) = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

(7) حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left([x] - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right) \quad (\text{الف})$$

حل)

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left([x] - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right) = 4 - 1 = 3$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \left([x] - \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right) = 3 - 0 = 3$$

حد = 3

$$\lim ([3x] + [-3x]) \quad \text{ب)}$$

حل) توجه کنید اگر $3x \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $[3x] + [-3x] = -1$ پس حد برابر -1 است.

(8) در مورد تابع $f: R \rightarrow R$ می‌دانیم:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in R$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه صفر حد داشته باشد آنگاه در هر نقطه دیگر هم حد دارد.

همچنین ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود داشته باشد، برابر صفر است.

حل: نقطه دلخواه x_0 را در نظر بگیرید و فرض کنید $t > 0$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x_0) + f(t)) = f(x_0) + 0$$

پس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ یعنی تابع در هر نقطه حد دارد.

در فوق از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ می‌شود زیرا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

(9) فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ اگر $A \neq 0$ ثابت کنید عددی مثبت مانند d وجود

دارد که هرگاه $0 < |x - a| < d$ ، آنگاه d وجود دارد که

$$0 < |x - a| < d \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\|f(x) - A\| \leq |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|A|}{2} < |f(x) - A|$$

$$\Rightarrow \frac{|A|}{2} < |f(x)|$$

$$(10) \quad \text{فرض کنید } f(x) = \begin{cases} x - |x| & , \\ x - |x+1| & , \end{cases} \quad \begin{matrix} |x| \\ |x| \end{matrix} \quad \text{همه نقاطی را بیابید که } f \text{ در}$$

آنها حد دارد.

(حل) تابع f به صورت زیر قابل بیان است.

$$f(x) = \begin{cases} x - |x| & |x| \\ x - |x+1| - 1 & |x| \end{cases}$$

این تابع در اعداد صحیح حد دارد. زیرا اگر $x_0 = x$ عدد صحیح باشد. اگر n زوج باشد

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow [x] = n \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n - n = 0$$

$$x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow [x] = n - 1 \quad \text{فرد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = n - (n - 1) - 1 = 0$$

مشابهاً اگر n فرد باشد. حد موجود است.

در اعداد غیر صحیح نیز این تابع حد دارد. چون در سمت راست یا چپ x_{m0} ، $[x]$ زوج یا فرد باقی می ماند.

پس این تابع روی R حد دارد.

(11) فرض کنید. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ و B عددی حقیقی باشد که $A > B$. پ

ثابت کنید عددی مثبت مانند وجود دارد که اگر $0 < |x - a| < d$ ، آنگاه

$$f(x) > \frac{A+B}{2}$$

حل) چون $A > B$ پس $A - B > 0$ اگر قرار دهیم $e = \frac{A-B}{2}$ چون

حدود وجود دارد. پس $d > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| &\Rightarrow \left| f(x) - A < \frac{A-B}{2} \right| \\ &\Rightarrow -\frac{A-B}{2} < f(x) - A < \frac{A-B}{2} \\ &\Rightarrow \frac{A-B}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{A+B}{2} < f(x) \end{aligned}$$

(12) فرض کنید $\sqrt{1+x^2} \leq f(x) \leq 1+|x|$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را حساب کنید

$$\text{حل) داریم: } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+|x|) = 1$$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

2-5-7 تمرین صفحه 115

ب) استفاده از تعریف ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x \frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} = +\infty \quad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{(x+1)^2} > M \Rightarrow (x+1)^2 < \frac{2\sqrt{2}}{M} \Rightarrow |x+1| < \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$$

پس کافی است. $d \leq \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{M}}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -2 \quad (2)$$

$$\frac{-3}{(x+2)^4} < -M \Rightarrow \frac{-3}{(x+2)^4} > M \Rightarrow (x+2)^4 < \frac{3}{M}$$

$$\Rightarrow |x+2| < \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$$

پس کافی است. $d \leq \sqrt[4]{\frac{3}{M}}$

$$\frac{2x+3}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2} > M \Rightarrow \frac{5}{x-2} > M-2 \Rightarrow x-2 < \frac{5}{M-2}$$

کافی است. $d \leq \frac{5}{M-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x}-1} = -\infty \quad (4)$$

$$\frac{1-4x}{x-4} = \frac{15+16-4x}{x-4} = -4 - \frac{15}{x-4} > M \Rightarrow -\frac{15}{x-4} > M+4$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{M+4} > x-4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x-2} = -\infty \quad (6)$$

$$\frac{3x}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2} < -M \Rightarrow \frac{6}{x-2} < -(3+M)$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{x+M} < x-2 \Rightarrow d = \frac{3}{3+M}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{4x^2 - 5}{2x^2 - 1} - 2 \right| &= \left| \frac{4x^2 - 5 - 4x^2 + 2}{2x^2 - 1} \right| = \left| \frac{-3}{2x^2 - 1} \right| < e \\ \Rightarrow \frac{3}{e} < 2x^2 - 1 &\Rightarrow \frac{3+e}{2e} < x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} < x \end{aligned}$$

کافی است $M > \sqrt{\frac{3+e}{2e}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} - 2 \right| &= \frac{1}{x^2 + 1} < e \Rightarrow \frac{1}{e} < x^2 + 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1-e}{e}} < x \end{aligned}$$

کافی است. $\sqrt{\frac{1-e}{e}} < M$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 8x) = +\infty \quad (9)$$

$$x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16 > M \Rightarrow x > \sqrt{M+16} - 4$$

کافی است $N > \sqrt{M+16} - 4$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 4x &= -(x-2)^2 + 4 < -m \\
 \Rightarrow M + 4 &< (x-2)^2 \\
 \Rightarrow 2 + \sqrt{m+4} &< x
 \end{aligned}$$

پس $N > 2 + \sqrt{M+4}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| &= \frac{2}{x^2-1} < e \Rightarrow \frac{2}{e} < x^2-1 \\
 \Rightarrow \frac{2+e}{4e} &< \Rightarrow \sqrt{\frac{2+e}{e}} < x
 \end{aligned}$$

پس $M \sqrt{\frac{2+e}{e}}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{2-x} > M &\Rightarrow x^2 > 2M - Mx \\
 \Rightarrow x^2 > Mx + \frac{M^2}{e} &> 2M + \frac{M^2}{e} \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{M}{2} \right)^2 &> 2M + \frac{M^2}{2} \\
 \Rightarrow x > \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}
 \end{aligned}$$

کافی است $N < \sqrt{2M + \frac{M^2}{e}} - \frac{M}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 3) = +\infty \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x^5 - 3 > M &\Rightarrow x^5 > M + 3 \\ &\Rightarrow x > \sqrt[5]{M + 3} \end{aligned}$$

پس $N > \sqrt[5]{M + 3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + x) = +\infty \quad (14)$$

$$x^5 + x > M \Rightarrow$$

به علت اینکه $x \rightarrow +\infty$ پس x را می توان نادیده گرفت.

$$x^5 x > x^5 + 1 > M \Rightarrow x > \sqrt[5]{M - 1} \Rightarrow N \geq \sqrt[5]{M - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{2x-4} = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$\left| \frac{x+5}{2(x+1)} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2}{x+1} \right| < e$$

$$\Rightarrow \frac{4}{e} - 2 < x \Rightarrow M \geq \frac{4}{e} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \quad (17)$$

$$\sqrt{x^2 + 1} > N \Rightarrow x^2 > N - 1 \Rightarrow x > \sqrt{N - 1} \Rightarrow M \geq \sqrt{N - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (18)$$

$$-\sqrt{x^2 + 1} > N \Rightarrow (x - 3)^2 - 7 > N^2$$

$$\Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 7} + 3 \quad M \geq \sqrt{N^2 + 7} + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 6x + 2} = +\infty \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 4} < -N &\Rightarrow x^2 - 4 > N^2 \Rightarrow x > \sqrt{N^2 + 4} \\ &\Rightarrow M \geq \sqrt{N^2 - 4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} = +\infty \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - 2x - 2} < N &\Rightarrow (x-1)^2 - 3 > N^2 \Rightarrow x-1 > \sqrt{N^2 + 3} \\ &\Rightarrow x > 1 + \sqrt{N^2 - 3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 - x} = -\infty \quad (21)$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{x^2 - x} > -N &\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > N^2 \\ &\Rightarrow x > \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \end{aligned}$$

$$M \geq \sqrt{\frac{1}{4} + N^2} + 1 \text{ پس}$$

25-5-2 تمرین صفحه 136

حدود زیر را حساب کنید.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| - 1}{|x| - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 1}{0^-} = +\infty$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 1} + x} = 0$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2| - |x|^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|n^2| - |n|^2}{n^2 - 1} = 0$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{3x - x^2} - 1} = 0$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3 + x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{6}{\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 5x + 6)} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x + 1} - 3}{\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} - 3} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 8) \left(\sqrt{7 + \sqrt[3]{x}} + 3 \right)}{\left(\sqrt[3]{x} \right) \left(\sqrt{x + 1} + 3 \right)} = \frac{6}{6} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \right) = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x + 6}} - 3}{(x - 27)^3} = \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{(x - 27)(x - 27)^2 \left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{x + 6} + 3} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 27} \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \right)$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}} - \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{x} (\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$14) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2[\cos x]}{x} = \frac{2-1}{0^-} = -\infty$$

$$15) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[12]{x^3} (1 - \sqrt[12]{x})}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[12]{x^{11}} + \sqrt[12]{x^{10}} + \dots + \sqrt[12]{x+1})} = \frac{1-}{12} = \frac{-1}{6}$$

$$16) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^4}{4} - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

28-6-2 تمرین صفحه 163

(1) در مورد پیوستگی هر یک از توابع زیر سسروی بازده داده شده تحقیق کنید.

الف) $f(x) = \frac{7}{x-3}$ روی بازه های $[0, 3]$ ، (x) ، $[2, +\infty)$ ، $(-\infty, 2]$

ب) تنها نقطه ناپیوستگی $x=3$ است، پس تابع فقط روی $(-\infty, 2]$ ، $[0, 2]$ ، $[0, 2)$ ، $(-2, 2)$.

حل) نقاط $x = \pm 2$ نقاط ناپیوستگی تابع است. پس بازه های $(-\infty, -2)$ ، $[0, 2)$ ، $(-2, 2)$ بازه های پیوستگی اند.

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{25-x^2}}$ روی بازه‌های $(-\infty, -5)$ و $[-\infty, -5]$, $[-5, -2]$ و $(-2, 5)$, $(-2, 5]$, $[5, \infty)$, $(5, +\infty)$

حل) ابتدا دامنه تابع را به دست می آوریم.

$$D_f = (-\infty, -5) \cup [-2, 5]$$

	-5	-2	5	
$25 - x^2$	-	+	+	-
$2 + x$	-	-	+	+

طبق دامنه: تابع روی $(5, +\infty)$, $[5, +\infty)$, $(-2, 5]$, $[-5, -2]$ ناپیوسته است.

تابع روی $(-\infty, -5)$, $[-2, 5)$, $(-2, 5)$ پیوسته است.

(2) فواصلی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته باشد.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12} \quad (1)$$

حل) دامنه تابع برابر $D_f = (-\infty, -3) \cup [4, +\infty)$ است. این بازه‌ها فواصل

پیوستگی اند.

$$f(x) = \frac{7}{x^2 - 9} \quad (2)$$

حل) $D_f = R - \{\pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ این فواصل

فواصل پیوستگی اند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (3)$$

(حل) چون فرجه رادیکال فرد و زیر رادیکال همه جا پیوسته است، فاصله پیوستگی R است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}} \quad (4)$$

$$D_f = [1, 2] \cup (4, +\infty)$$

		۱	۲	۴
$x-4$	-	-	-	+
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	+

(3) نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (حل) $x=2$ نقطه ناپیوستگی است.

(2) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ (حل) $x=1$ نقطه ناپیوستگی است.

(3) $f(x) = \frac{x}{x}$ (حل) $x=1$ نقطه ناپیوستگی است.

(4) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 2}$

(حل) $x = 1, 2$ نقاط ناپیوستگی اند.

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x \leq -1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 1 \\ 2x+1 & 1 < x \end{cases} \quad (5)$$

(حل) تابع در $x=-1$ و $x=1$ ناپیوستگی دارد، چون تابع در $x=1$ تعریف نشده

و در $x=-1$ حد ندارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۳۴

$$f(x) = \begin{cases} [x] & -2 < x < 0 \\ x - [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad (6)$$

(حل) تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 1$ از دامنه اش ناپیوسته است.

این تابع در $x = 0$ پیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

(4) پیوستگی تابع داده شده را در نقطه یا فاصله داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = x - [x] \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2 \quad (1)$$

(حل) تابع در هر دو عدد صحیح داده شده ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \quad x_0 = 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{2x}{|x|} & x \neq 0 \quad x_0 = 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

این تابع در $x_0 = 0$ ناپیوسته است چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2 \neq 2 = f(0)$

$$(4) \text{ فاصله } (4, 6) \text{ و } f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-x^2}} .$$

دامنه تابع برابر $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ است پس تابع f روی $(4, 6)$ ناپیوسته است.

$$(5) \text{ در فاصله } [1, +\infty) , f(x) = \sqrt{x^2 - 1} .$$

دامنه تابع برابر $(1, +\infty) \cup [0, -\infty)$ است پس تابع روی $(1, +\infty)$ پیوسته است.

$$(6) \text{ در فاصله } (-\infty, 2], f(x) = \sqrt{2-x}.$$

چون $D_f = (-\infty, 2]$ است پس تابع روی $(-\infty, 2]$ پیوسته است.

$$(7) \text{ در فاصله } [-5, 5], f(x) = \sqrt{25-x^2}.$$

دامنه تابع برابر $[-5, 5]$ است که تابع روی آن پیوسته است.

$$(8) \quad x_0 = 1 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{4}{|x|} & x > 1 \\ 2[2x] + 1 & x < 1 \end{cases}$$

تابع در $x_0 = 1$ تعریف نشده است پس در این نقطه ناپیوسته است.

$$(5) \text{ اگر تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2} \text{ پیوسته باشد. } f(2) \text{ را حساب کنید.}$$

$$\text{حل) } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 12$$

$$(6) \text{ تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases} \text{ در نقطه } x=0 \text{ چه نوع}$$

ناپیوستگی دارد؟

$$\text{حل) ناپیوستگی اساسی چون حد وجود ندارد زیرا: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{x} = 2$$

$$(7) \text{ به ازاء چه مقدار } a \text{ تابع } f \text{ با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases} \text{ در}$$

$x=0$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow a = 0 \quad (\text{حل})$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & -p \leq x \leq -\frac{p}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2} \\ \cos x & \frac{p}{2} \leq x \leq p \end{cases} \quad (8)$$

مقدار a و b را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}^-} f(x) = a + b = f\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}^+} f(x) = -a + b = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 2 \Rightarrow -a + b = 2$$

$$\Rightarrow b = 1, \quad a = -1$$

$$(99) \text{ تابع با ضابطه } f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor \text{ در } x=1 \text{ چه نوع بستگی دارد؟}$$

(حل) داریم: $f(1) = 1$ تعریف شده است. ناپیوستگی اساسی

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$\Rightarrow$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

(10) اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + ax, & x > 2 \\ ax^2 + 1, & x \leq 2 \end{cases}$ در R پیوسته باشد مقدار a را حساب کنید.

حل) چون ضابطه ها روی R پیوسته اند کافی است پیوستگی در $x=2$ بررسی شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + ax) = 4 + 2a = f(2) = 4a + 1$$

$$\Rightarrow 4 + 2a = 4a + 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(11) به ازاء چه مقدار a تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} [x] - x, & x \notin \mathbb{Z} \\ a, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ همواره

پیوسته است؟

حل) با توجه به خواص جزء صحیح همواره $0 \leq x - [x] < 1$ پس

$0 \leq [x] - x < 1$ بنابراین برای $x \notin \mathbb{Z}$ همواره داریم $[x] - x = -1$ پس باید

$a = -1$ باشد.

(12) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ bx - 1, & x < 1 \end{cases}$ در $x=1$

پیوسته باشد a و b را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + a) = 3 \Rightarrow 1 + a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 1) = 3 \Rightarrow b - 1 = 3 \quad \text{حل}$$

$$\Rightarrow a = 2, \quad b = 4$$

(13) به ازاء چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-x}, & x \geq 0 \\ 2a - x, & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته

است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2a - x) = 2a = f(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad (\text{حل})$$

(14) a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x_0 = 4$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x-2] + b & , \quad x < 4 \\ \left[\frac{x}{3}\right] + b & , \quad x = 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & , \quad x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8 = f(4) = 1 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (a[x-2] + b) = 5a + b = f(4) = 1 + b \quad (\text{حل})$$

$$1 + b = 8 \quad \Rightarrow b = 7 \quad 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

(15) اگر تابع با ضابطه $f(x) = (a^2 - 4a)[x] + 3[x]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد $+\frac{x}{x^2+1}$

مقدارهای a را پیدا کنید.

(حل) نقطه $x_0 = 0$ را در نظر بگیرید داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -(a^2 - 4a) - 3 = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad a = 3$$

(16) پیوستگی تابع $f(x) = [x + [x]][1 - x + [x]]$ را در $X=0$ بررسی کنید.

(حل) واضح است که $f(0) = 0$ است.

فرض کنید $x=0/1$ از راست نزدیک صفر باشد. و
 $f(0/1)=[0/1+0][1-0/1+0]=0$ اگر $x=-0/1$ را از چپ نزدیک صفر در نظر
 بگیریم.

$$f(-0/1)=[-0/1-1][1+0/1+1]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x) = f(0) = 0$$

بنابراین:

پس تابع در $x_0=0$ پیوسته است.

$$(17) \text{ تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 9x^2 + 5x + 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ مفروض است. این}$$

تابع در چند نقطه صحیح پیوسته است. آیا این تابع در $x_0 = \frac{5}{4}$ و $x_0 = \sqrt{2}$ و

$$x_0 = \frac{7}{3} \text{ پیوسته است.}$$

حل) چون برای $x \notin \mathbb{Z}$ ، داریم $f(x)=1$ ، اگر x_0 عددی صحیح باشد آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$$

پس باید اعداد صحیحی را بیابیم که $f(x_0)=1$ باشد.

$$4x^{3x} - 9x^2 + 5x + 1 = 1 \Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 9x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = \frac{5}{4}$$

این تابع در اعداد صحیح $x_0=0$ و $x_0=1$ پیوسته است.

این تابع در نقاط $x_0 = \frac{5}{4}$ ، $x_0 = \sqrt{2}$ ، $x_0 = \frac{7}{3}$ پیوسته است زیرا این اعداد

صحیح نیستند و برای همه آنها $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 1$ است.

(18) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x_0 = -2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}, & x < -2 \\ a, & x = -2 \\ b + [x^2], & x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = b + 4 = f(-2) = a \quad (\text{حل})$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = 4 = a$$

$$\Rightarrow a = 4, \quad b = 0$$

(19) a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر همواره پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx - 3, & x < 1 \\ x^3 - x + 4a, & 1 \leq x < 2 \\ 5x - 2b, & x \geq 2 \end{cases}$$

(حل) چون ضابطه ها چند جمله ای اند هر کدام همواره پیوسته اند باید پیوستگی در

$x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 + bx + 3) = 2a + b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - x + 4a) = 8 - 2 + 4a$$

$$f(1) = 1 - 1 + 4a = 4a, \quad f(2) = 10 - 2b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 3 = 4a \\ 6 + 4a = 10 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4b = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{5}{4}$$

32-6-2 تمرین صفحه 170.

(1) فرض کنید تابع g در نقطه 0 پیوسته باشد $g(0) = 0$ ، f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه صفر در نامساوی $|f(x)| \leq g(x)$ صدق کند. ثابت کنید f در نقطه 0 پیوسته است.

_____ (ل)

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq g(x) &\Rightarrow |f(0)| \leq g(0) = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \\ -|f(x)| \leq f(x) \leq |x| &\Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

حال چون g پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ از طرفی داریم:

$$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -g(x) = 0$ $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ در نتیجه پس f در صفر پیوسته است.

(2) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) فرض کنید تابع f در نقطه a پیوسته است.

الف) اگر $f(a) > 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a مثبت است.

(حل)

چون $f(a) > 0$ است اگر $e = \frac{f(a)}{2}$ را در نظر بگیریم: $0 < d$ موجود است به

طوری که

$$|x - a| < 4 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{f(a)}{2} < f(x) - f(a) < \frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$$

چون $f(a) > 0$ پس f در همسایگی d از a ، مثبت است.

ب) اگر $f(a) < 0$ ثابت کنید f در یک همسایگی a منفی است.

(حل)

چون $f(a) < 0$ پس $f(a) > 0 - f(a)$ اگر قرار دهیم $e = -\frac{f(a)}{2}$ چون f در a پیوسته

است، $4 > 0$ موجود است به طوری که

$$|x - a| < 4 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

$$\Rightarrow f(a) + \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) - \frac{f(a)}{2}$$

$$\frac{3}{2} f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2} \quad \text{پس}$$

حال چون $f(a) < 0$ پس در همسایگی d از a ، f منفی است.

(3) فرض کنید تابع f در x_0 پیوسته باشد و در هر همسایگی x نقاطی مانند x_1 ، x_2

وجود داشته باشد که $f(x_2) > 0$ ، $f(x_1) < 0$ ، ثابت کنید $f(x_0) = 0$.

حل) اگر $f(x_0) \neq 0$ طبق مسأله (2) همسایگی هایی حول x_0 وجود دارد که روی

آنها $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ ، بنابراین نقاط x_1 ، x_2 با شرایط فوق وجود ندارد

پس $f(x_0) = 0$ است.

(4) مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\frac{x}{2}-1}{1+\frac{x}{3}-1} = \frac{3}{2} \quad (\text{حل})$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(5) فرض کنید در نقاط دیگر

$$f(x) = \begin{cases} [x+1] \sin \frac{1}{x} & , \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

پیوستگی f در نقطه های 0 ، 1 بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x+1] \sin \frac{1}{x} = 0 \times k = 0 \quad (\text{حل})$$

$$x_0 = 0$$

حد راست این تابع وجود ندارد پس تابع در صفر پیوسته نیست.

برای $x_0 = 1$ حد راست برابر 0 است زیرا:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1 \times \sin 1 = \sin 1 \neq 0 \end{aligned}$$

پس تابع در نقطه 1 پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

ناپیوستگی تابع های fog و gof را تعیین کنید.

حل: چون همواره $0 \leq x - [x] < 1$ پس $g(x) > 0$ است لذا $fog(x) = f(g(x)) = 1$ این تابع همواره پیوسته است.

برای gof داریم:

$$gof(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

پس $gof(x) = 1$ همواره پیوسته است.

توجه: این مثال نشان می دهد ممکن است دو تابع ناپیوسته باشند ولی ترکیب آنها پیوسته باشد.

(7) ثابت کنید تابعی مانند f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$$

(حل) اگر f در a پیوسته باشد، به ازای $e > 0$ داده شده $d > 0$ موجود

است که

$$|x - a| < d \Rightarrow |f(x) - f(a)| < e$$

اگر به جای x ، $x + a$ قرار دهیم داریم:

$$|x - 0| = (x + a) - a < d \Rightarrow |f(x + a) - f(a)| < e$$

و این یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$

حال فرض کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x + a) = f(a)$

اگر به جای x قرار دهیم $t - a$ هرگاه $x \rightarrow 0$ آن گاه $t \rightarrow a$.

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a) \quad \text{پس } f \text{ در } a \text{ پیوسته است.}$$

(8) نقاط ناپیوستگی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

(حل) داریم: $f(1) = f(-1) = 1$

تابع در 1 پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \Rightarrow$$

تابع در $x = -1$ ناپیوسته است.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1 \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{p}{2} x & , |x| \leq 1 \\ |x-1| & , |x| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

حل داریم $f(-1) = f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{p}{2} x = 0 \\ \Rightarrow & \text{تابع در } -1 \text{ ناپیوسته است.}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x-1| = 2$$

$$f(x) = x[x] \quad (3)$$

حل تابع در اعداد صحیح به غیر از صفر ناپیوسته است. در صفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0 \times Q = 0 = f(0)$$

$$f(x) = x - [x] \quad (4)$$

حل تابع در تمام اعداد صحیح ناپیوسته است.

$$x \in R - \{0\}, \quad f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \quad (5)$$

این تابع در نقاط به صورت $\frac{1}{n}$ که $n \in \mathbb{Z}$ است ناپیوسته است.

$$f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \quad (6)$$

صفر است ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in Q \\ -x^2 & , \quad x \notin Q \end{cases} \quad (7)$$

حل) این تابع فقط در صفر پیوسته است چون هر دنباله $\{a_n\}$ گویا یا اسم که به صفر میل کند a_n^2 ، $-a_n^2$ نیز به صفر میل می کند.

برای سایر نقاط: اگر $x_0 \in Q$ باشد $a_n = x_0 + \frac{1}{n}$ در Q قرار دارد و

$$f(a_n) = (x_0 + \frac{1}{n})^2 \rightarrow x_0^2 = f(x_0)$$

و $b_n = x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ در Q قرار ندارد و

$$f(b_n) = -(x_0 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2 \rightarrow -x_0^2 \neq f(x_0)$$

مشابه این تابع در اعداد اصم نیز ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in [0, 1] \\ x+1 & x \in (1, 3) \end{cases} \quad (8)$$

حل) این تابع در $x_0 = 1$ ناپیوسته است چون

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \Rightarrow \text{تابع پیوسته نیست}$$

$$f(1) = 1$$

توجه کنید دامنه تابع برابر $[0, 3]$ است که در $x_0 = 1$ پیوسته نیست.

$$x \in [0, 1], \quad f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2}[1-2x] \quad (9)$$

حل) داریم

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = 1, \quad f(0)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}[2x] - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[-2x]$$

$$= -x + \frac{1}{2}([2x] - [-2x])$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{تابع در صفر ناپیوسته است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + \frac{1}{2}(2 - (-3)) = -1 + \frac{5}{2}$$

تابع در 1 پیوسته نیست

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - (-2)) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

تابع در $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست $\Rightarrow$

(9) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-4}$ ثابت کنید f روی بازه $[4, 10]$ پیوسته است.

حل) چون برای هر $x \in [4, 10]$ ، $x - 4 \geq 0$ است و تابع $x - 4$

پیوسته است پس f روی این بازه پیوسته است.

(10) فرض کنید $f: [0, +\infty) \rightarrow R$ تابعی دلخواه باشد و $g(x) = f(|x|)$, ثابت

کنید f در نقطه 0 از راست پیوسته است اگر و فقط اگر g در نقطه 0 پیوسته باشد.

است پس $|x| \geq 0$ از راست پیوسته باشد. چون 0 در f فرض کنید حل)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = f(0) = g(0)$$

پس g در صفر پیوسته است.

اگر g در صفر پیوسته باشد. آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = f(0)$$

پس f از راست در 0 پیوسته است.

$$(11) \quad \text{آیا معادله } x^5 - 18x + 2 = 0 \text{ ریشه ای در بازه } [-1, 1] \text{ دارد؟}$$

حل) بله اگر $f(x) = x^5 - 18x + 2$ در نظر بگیریم:

$$\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = -15 \end{array} \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \text{تابع دارای ریشه است}$$

$$(12) \quad \text{ثابت کنید معادله } x^5 - 3x^2 - x + 1 = 0 \text{ حداقل یک ریشه در بازه } (0, 2) \text{ دارد.}$$

حل) $f(x) = x^5 - 3x^2 - x + 1$ را در نظر بگیرید.

حداقل یک ریشه دارد.

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 - 3 - 1 + 1 = -2 \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow$$

$$(13) \quad \text{فرض کنید تابع } f: [1, 2] \rightarrow [0, 3] \text{ پیوسته باشد و } f(1) = 0 \text{ و } f(2) = 3$$

ثابت کنید عددی مانند x_0 در بازه $(1, 2)$ موجود است که $f(x_0) = x_0$.

حل) اگر تابع $h(x) = f(x) - x$ را در نظر بگیرید. داریم:

$$h(1) = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$h(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$$

چون $h(1)h(2) < 0$ است. پس x در $(1, 2)$ موجود است که $h(x_0) = 0$ پس

$$f(x_0) = x_0$$

$$(14) \quad \text{فرض کنید } f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin(px) + 3 \text{ . آیا عددی مانند } x_0 \text{ در بازه } (2 \text{ و } -2)$$

$$\text{وجود دارد که } f(x_0) = \frac{7}{3} ?$$

$$\text{حل) چون } f(2) = 2 + 3 = 5, \quad f(-2) = -2 + 3 = 1 \text{ و تابع } f \text{ روی } (-2 \text{ و } 2)$$

$$\text{پیوسته است و } 1 < \frac{7}{3} < 5 \text{ پس } x_0 \text{ وجود دارد.}$$

$$(15) \quad \text{فرض کنید تابع } f : [-1, 1] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد،}$$

$$f(0) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad f(x) \neq 2.$$

$$\text{حل) اگر به ازای } x_0, \quad f(x_0) > 2 \text{ شود، طبق قضیه مقدار میانی تابع هر مقدار}$$

$$\text{بین } f(0) = 0 \text{ و } f(x_0) \text{ را خصوصاً مقدار } 2 \text{ را می گیرد یعنی } x \text{ وجود دارد}$$

$$\text{که } f(x) = 2 \text{ . و این تناقض است. پس همواره } f(x) < 2 \text{ است.}$$

$$(16) \quad \text{فرض کنید تابع } f : [3, 5] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد.}$$

$$f(3) = 30, \quad x \in [3, 5], \quad f(x) \neq 4 \text{ ثابت کنید } f(5) < 4.$$

$$\text{حل) اگر } f(5) > 4 \text{ باشد، چون تابع پیوسته است مقادیر بین } f(3) = 30 \text{ و } f(5)$$

$$\text{خصوصاً مقدار } 4 \text{ را می گیرد، یعنی } x \text{ وجود دارد که } f(x) = 4 \text{ که تناقض با}$$

$$\text{فرض است. پس } f(5) < 4 \text{ است.}$$

$$(17) \quad \text{فرض کنید تابع } f : [0, 3] \rightarrow R \text{ پیوسته باشد، } f(0) = 1 \text{ و معادله } f(x) = 0$$

$$\text{هیچ ریشه ای در بازه } [0, 3] \text{ نداشته باشد ثابت کنید برای هر } x \in [0, 3], \text{ داریم}$$

$$f(x) > 0$$

$$\text{حل) برای } x \in [0, 3] \text{ را در نظر بگیرید، } f \text{ روی این بازه پیوسته است. چون}$$

$$f(0) = 1, \text{ اگر } f(x) < 0 \text{ باشد، حتماً } f \text{ روی این بازه ریشه دارد که تناقض است،}$$

پس همواره $f(x) > 0$.

$$(18) \quad f(0) = 0, \quad f: R \rightarrow R \quad \text{فرض کنید}$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in R$$

ثابت کنید اگر f در نقطه 0 پیوسته باشد در هر نقطه دیگر هم پیوسته است

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$$

$$x \rightarrow 0$$

(حل) نقطه دلخواه a را در نظر بگیرید نشان می دهیم

برای $e > 0$ داده شده، $d > 0$ وجود دارد که

$$|x| < d \Rightarrow |f(x)| < e$$

$$f(x+a) \leq f(x) + f(a)$$

$$\Rightarrow f(x+a) - f(a) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow |x| < d \Rightarrow |f(x+a) - f(a)| \leq |f(x)| < e$$

و این یعنی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x+a) = f(a)$ پس f در a پیوسته است.

$$x \rightarrow 0$$

$$(19) \quad \text{فرض کنید } I \text{ بازه ای باز باشد، تابع های } f, g: I \rightarrow R \text{ پیوسته باشد. و:}$$

$$s(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

$$t(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad x \in I$$

ثابت کنید s و t پیوسته اند.

(حل) توابع s و t را می توان به صورت زیر نوشت:

۵۲ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$s(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

$$t(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

با توجه به فرض پیوستگی f و g همه توابع سمت راست پیوسته اند.

(20) دو تابع مانند f و g در نظر بگیرید. آیا ممکن است؟

الف) f در نقطه a پیوسته باشد و g در نقطه a پیوسته نباشد اما $f \circ g$ در نقطه a پیوسته باشد.

حل) تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ را در نظر می گیریم

f در $a = 0$ پیوسته است ولی g در $a = 0$ پیوسته نیست اما:

$$f \circ g(x) = 1$$

همه جا پیوسته است.

ب) f در a پیوسته باشد و g در a پیوسته نباشد اما $f \circ g$ در a پیوسته باشد.

حل) مثال قسمت الف را در نظر بگیرید اینبار $g \circ f(x) = 1$.

ج) نه f در a پیوسته باشد و نه g اما $f \circ g$ در a پیوسته باشد.

حل) تمرین (6) مثال مورد نظر است

(21) الف) ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه فرد حد اقل یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر $f(x)$ چند جمله ای درجه فرد باشد آنگاه

حداقل یک ریشه دارد.

ب) فرض کنید $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ و $d < 0$ ثابت کنید معادله $p(x) = 0$ حد اقل دو ریشه متمایز دارد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

حل) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$ و $f(0) = d < 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$ و.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

پس حد اقل ریشه در بازه $(-\infty, 0)$ و یک ریشه در بازه $(0, +\infty)$ دارد.

(22) فرض کنید n عددی زوج باشد

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $a_n a_0 \neq 0$. ثابت کنید معادله

$f(x) = 0$ حداقل دو ریشه حقیقی دارد.

حل) چون $a_n a_0 < 0$ فرض کنید $a_0 < 0$ و $a_n > 0$. چون n زوج است و

پس $a_n > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = +\infty$$

از طرفی $f(0) = a_0 < 0$ پس حد اقل یک ریشه حقیقی در $(-\infty, 0)$ و یک ریشه

حقیقی در $(0, +\infty)$ وجود دارد.

فصل سوم

مشتق

3-1-17 تمرین صفحه 192

(1) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را حساب کنید.

$$f(x) = 3x + 1 \quad (1)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+1-3x-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f(x) = \sqrt{3x+4} \quad (2)$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+4} - \sqrt{3x+4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)+4 - (3x+4)}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = 3$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h\sqrt{3(x+h)+4} + \sqrt{3x+4}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x_0}{x_0^2+1}}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x x_0^2 + 2x - 2x_0 x^2 - 2x_0}{(x-x_0)(x^2+1)(x_0^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(1-x_0^2)}{(x_0^2+1)^2} = f'(x_0)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad (4)$$

$$\lim \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x_0}{\sqrt{x_0+1}}}{x-x_0} = \frac{x\sqrt{x_0+1} - x_0\sqrt{x+1}}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}}$$

$$= \lim \frac{x-x_0}{(x-x_0)\sqrt{x+1}\sqrt{x_0+1}(x\sqrt{x_0+1} + x_0\sqrt{x+1})} = \frac{1}{2(x_0+1)\sqrt{x_0+1}}$$

(2) با استفاده از تعریف مشتق هر یک را در نقطه داده شده حساب کنید.

$$f(x) = 5x^2 + x \quad (1)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5x+6)(x-1)}{x-1} = 11$$

$$x=1, \quad f(x) = \sqrt{x^2+5} \quad (2)$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x=1, \quad f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \quad (3)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+2}{2x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{(x-1)(2x+1)} = -\frac{1}{3}$$

$$x=1, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad (4)$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(2x+1)} = 0$$

(3) در توابع زیر اولاً، پیوستگی تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید $(x=a)$ ثانیاً $f^+(a)$ و $f^-(a)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x=a=4 \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -4 \\ -x-6, & x > -4 \end{cases} \quad (1)$$

$x=a=4$

حل) اولاً تابع در $a=-4$ پیوسته است. ثانیاً $f^+(-4)=-1$ و $f^-(-4)=1$

$$a=2, \quad f(x) = \begin{cases} x^2-4, & x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

حل) اولاً تابع در $a=2$ پیوسته است. ثانیاً $f^+(2)=+\infty$ و $f^-(2)=4$

$$a=2, \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2-4, & x < 1 \\ x-2, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$f^-(1)=6$ و $f^+(1)=1$ و $a=2$ پیوسته است

(4) اولاً ثابت کنید $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

حل) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ پس f پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x|}{x}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

پس $f^+'(0) = 1$ و $f^-'(0) = -1$ است. لذا تابع صفر مشتق ندارد

ثانیاً همچنین برای هر $x \neq 0$ داریم: $f'(x) = \frac{|x|}{x}$

(5) a و b را طوری تعیین کنید که هر یک از توابع زیر در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

$$x=1, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ ax - b & x \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

حل) باید تابع در $x=1$ پیوسته باشد. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Rightarrow a + b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ a & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{از طرفی داریم:}$$

$$\Rightarrow f^-'(1) = 2 = f^+'(1) = a \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = -1 \end{matrix}$$

$$x=3 \quad \text{در} \quad f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & x < 3 \\ bx - 6 & x \geq 3 \end{cases} \quad (2)$$

حل) شرط پیوستگی را نداریم: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$

$$\Rightarrow 9a + 3 = 3b + 6$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۶

از طرفی داریم: $f(x) = \begin{cases} 2ax & x < 3 \\ b & x \leq 3 \end{cases}$ پس داریم

$$\begin{aligned} f^-(3) &= 6a \\ f^+(3) &= b \end{aligned} \Rightarrow b = 6a \Rightarrow 9a = 18a + 3$$

$$\Rightarrow -9a = 3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$b = -2$$

(6) پیوستگی و مشتق پذیری تابع f را در $x=2$ تحقیق کنید اگر:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & x \leq 2 \\ 8x - 11 & x > 2 \end{cases}$$

(حل)

تابع پیوسته است $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (8x - 11) = 5 \Rightarrow f(2) = 8 - 3 = 5$

از طرفی $f^+(2) = f^-(2) = 8$ پس $f'(x) = \begin{cases} 4x & x \leq 2 \\ 8 & x > 2 \end{cases}$

پس تابع در 2 مشتق پذیر است.

(7) در چه نقطه ای از مخفی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

(حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 = -2 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(8) در چه نقطه‌ای از منحنی $y = x^3 - 3x + 5$ ، خط مماس عمود بر $y = -\frac{x}{9}$ است.

(حل) باید $y'(x) = 9$ باشد پس:

$$3x^2 - 3 + 9 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

(9) معادله خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه $A(2, 0)$ بیابید.

$$m = y'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}(2) = +\infty \quad (\text{حل})$$

پس $x = 2$ معادله خط مماس است.

3-1-18 تمرین صفحه 193

(1) مشتق پذیری هر یک از توابع داده شده را بررسی کنید.

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad x_0 = 1 \quad (1)$$

در نتیجه

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 1 \\ x^2 - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{حل})$$

$$f^+(1) = 2$$

و $f^-(1) = -2$ پس تابع مشتق پذیر نیست.

$$x_0 = 2, \quad f(x_0) = 4x + 1 + |x - 2| \quad (2)$$

(حل) مشتق پذیر نیست چون

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3 & x < 2 \\ 5x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f^+(2) &= 5 \\ f^-(2) &= 3 \end{aligned}$$

$$x_0 = 0, \quad f(x) = \sqrt{x^3 + x^2} \quad (3)$$

(حل)

$$f(x) = |x|\sqrt{x+1} = \begin{cases} x\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ x\sqrt{x+1} & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^+(0) &= 1 \\ f^-(0) &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \text{تابع مشتق پذیر نیست}$$

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} \quad x_0 = 1 \quad (4)$$

(حل)

$$f(x) = 1x - 11\sqrt{x+2} = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x+2} & x \geq 1 \\ (1-x)\sqrt{x+2} & x < 1 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست، $x < 1$

$$\Rightarrow f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 1 \\ 4x-1 & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad (5)$$

(حل)

تابع مشتق پذیر نیست چون $f'_+(1) = 4, f'_-(1) = 2$ است.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad x=1 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \Rightarrow f'(1) = +\infty \Rightarrow \text{تابع مشتق پذیر نیست.}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x > 0 \\ \frac{1+x}{1-x} & x \leq 0 \end{cases} \quad (2) \text{ فرض کنید}$$

ثابت کنید f در نقطه $x=0$ مشتق پذیر نیست.

(حل)

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_+(0) = -1$$

تابع مشتق پذیر نیست. $\Rightarrow$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} \Rightarrow f'_-(0) = -2$$

$$(3) \text{ فرض کنید } f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases} \text{ ثابت کنید } f \text{ در نقطه}$$

$x=1$ مشتق پذیر است و $f'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2 \quad f'_+(1) = 2$$

پس تابع مشتق پذیر است و $f'(1) = 2$ است.

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f'_-(1) = 2$$

$$(4) \text{ فرض کنید } x \neq 0, f(x) = (-1)^{[x]} \frac{x-1}{x}, \text{ آیا } f \text{ در نقطه } x=0 \text{ مشتق}$$

پذیر است؟

(حل) زیرا این نقطه در دامنه ی تابع قرار ندارد. تابع پیوسته نیست، پس مشتق پذیر نیست.

$$(5) \text{ درباره ی مشتق پذیری تابع } x \in R \text{ و } f(x) = x[x] \text{ بحث کنید.}$$

(حل) این تابع در اعداد صحیح مشتق پذیر نیست، چون در این نقاط پیوسته نیست.

$$\text{در نقطه ی صفر پیوسته است ولی داریم: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x] - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [x]$$

که حد اخیر وجود ندارد.

در سایر نقاط اگر $x_0 = n + a$ باشد که $0 < a < 1$ است.

در همسایگی x_0 داریم $f(x) = nx$ پس $f'(x) = n$ که مشتق پذیر است.

(6) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد و $f(a) \neq 0$. ثابت کنید.

$$g(x) = [x-1]f(n) \text{ در نقطه‌ی } a \text{ مشتق پذیر نیست.}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1x - a}{x - a} = 1 \text{ پس تابع مشتق پذیر نیست.}$$

(7) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = \frac{1x - a}{x - a}$ در هر نقطه مشتق پذیر باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & |x| < 1 \end{cases}$$

(حل) ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b = f(1) = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -\frac{1}{x} & x \leq -1 \\ ax^2 + b - 1 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1) = -1 = f'(-1) = 2a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

(8) فرض کنید $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. $f'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 1}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &= 1 + \frac{p}{4}
 \end{aligned}$$

(9) فرض کنید $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-100)$ ، $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) چون $f(0) = 0$ داریم.

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)\dots(x-100)}{x} = (-1)(-2)\dots(-100) \\
 &= 100!
 \end{aligned}$$

(10) اگر $f(x) = [x] \sin x$ ، مقدار $f\left(\frac{p}{2}\right)$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{p}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{p}{2} + h\right) - f\left(\frac{p}{2}\right)}{h} = \frac{\left[\frac{p}{2} + h\right] \sin\left(\frac{p}{2} + h\right) - 2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{p}{2} + h\right) - 1}{h} = (\sin x)' \left(\frac{p}{2}\right) = 0
 \end{aligned}$$

حل) داریم

(11) اگر برای $|x| < 1$ ، $x \leq f(x) \leq x = x^2$ ، مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

حل) واضح است که $0 \leq f(0) \leq 0$ پس $f(0) = 0$ است.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &\leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+x \\ x > 0 &\Rightarrow f'_+(0) = 1 \\ x < 0 &\Rightarrow 1+x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \\ &\Rightarrow f'_-(0) = 1 \end{aligned}$$

پس $f'(0) = 1$ است.

(12) مقدار مشتق تابع $f(x) = x|x|$ را در صفر بدست آورید.

حل) داریم: $f(0) = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

3-4-11 تمرین صفحه ی 247

(1) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

- 1) $y = \sin^5 x \quad \rightarrow \quad y' = 5 \cos x \sin^4 x$
- 2) $y = (tgx + \cos x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(tgx + \cos x)$
- 3) $y = tg(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \sec^2(\sin x)$
- 4) $y = \sin(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$
- 5) $y = \cos^2(\sin 3x) \quad \rightarrow \quad y' = -6 \sin 3x \cdot \sin(\sin 2x) \cos(\sin 3x)$
- 6) $y = 5 \sin(\cos 4x) \quad \rightarrow \quad y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$

$$7) \quad y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x + 3} \quad \rightarrow y' = \frac{-2\sin x(\cos x + 3) + \sin x(2\cos x - 1)}{(\cos x + 3)^2}$$

$$= \frac{-7\sin x}{(\cos x + 3)^2}$$

$$8) \quad y = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}$$

$$9) \quad y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$10) \quad y = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} \rightarrow y' = \frac{\sec^2 x(\tan x + 1) - \sec^2 x(\tan x - 1)}{(\tan x + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

2) در هر مورد $y' = \frac{dy}{dx}$ را بیابید.

$$1) \quad x \sin y + y \sin x = xy \quad y' = -\frac{\sin y + y \cos x - y}{x \cos y + \sin x - x}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16} \quad y' = -\frac{\frac{3}{2\sqrt[3]{x}}}{\frac{3}{2\sqrt[3]{y}}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$3) \quad y\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 5 \quad y' = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{y-3x}{4x}$$

$$4) \quad x^2y + \sin^2 y = y \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + \sin 2y - 1}$$

(3) مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$1) \quad y = \cos^{-1}(7x^2) \quad y' = -\frac{14x}{\sqrt{1-49x^4}}$$

$$2) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = -\frac{3x^2 + 2}{\sqrt{1 - (x^2 + 2x)^2}}$$

$$3) \quad y = \sin^{-1}(\cos 2x) \quad y' = \frac{-2\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^2 2x}} = -2$$

$$4) \quad y = \tan^{-1}(x^5) \quad y' = \frac{5x^4}{1+x^{10}}$$

$$5) \quad y = \tan^{-1}(\cos x) \quad y' = \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$6) \quad y = \cos\left(5\cos^{-1}x\right) \quad y' = \frac{-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-25\left(\cos^{-1}x\right)^2}}$$

$$7) \quad y = \tan^{-1}(\sqrt{x+1}) \quad y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+(\sqrt{x+1})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}$$

$$8) \quad y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

$$9) \quad y = \cos^{-1}(\sin x) \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1$$

$$10) \quad y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}$$

$$11) \quad x \sin y + x^2 = \tan^{-1}y \quad y' = -\frac{\sin y + 2x}{x \cos y + \frac{1}{1+y^2}}$$

$$12) \quad y \sin^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x+y)$$

$$y' = -\frac{\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}{\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}} + \sin^{-1}(xy) + \frac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}}$$

$$(4) \text{ هرگاه } f(x) = x^3 + x, \text{ مطلوب است محاسبه } (f^{-1})'(2).$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 y=2 & \Rightarrow x^3+x=2 & \Rightarrow x^3+x-2=0 \\
 & & \Rightarrow (x-1)(x^2+x+2)=0 \\
 & & \Rightarrow x=1 \\
 f'(x)=3x^2+1 & \Rightarrow (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(5) اگر f مسافتی باشد که متحرک در زمان t طی می کند، مطلوب است محاسبه شتاب $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ ، اگر $s = 50 + 80t + 16t^2$ باشد.

$$a = 32 \quad (\text{حل})$$

(6) اگر $x = t + t^2$ و $y = t + t^3$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در $b=1$ محاسبه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 x = t + t^2 = f(t) & \quad f'(t) = 1 + 2t, & f''(t) = 2 \\
 \Rightarrow & \\
 y = t + t^3 = g(t) & \quad g'(t) = 1 + 3t^2, & g''(t) = 6t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1) &= \frac{g'(1)}{f'(1)} = \frac{3}{4} \\
 \frac{d^2y}{dx^2}(1) &= \frac{g''(1)f'(1) - f''(1)g'(1)}{(f'(1))^3} = \frac{18 - 8}{9} = \frac{10}{9}
 \end{aligned}$$

(7) اگر $y = 3x^2 + 4x + 1$ آنگاه Δy و dy را به ازای $x = 3$ و $\Delta x = 0.1$ محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(3 + 0.1) - f(3)$$

(حل)

$$\begin{aligned} &= 3(3.1)^2 + 4(3.1) + 1 - 27 - 12 - 1 \\ &= 3(9.61) + 12.4 - 39 \\ &= 28.83 + 12.4 - 39 = 2.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\Delta x & \Rightarrow & dy = 22 \times 0.1 = 2.2 \\ f'(x) &= 6x + 4 & \Rightarrow & f'(3) = 22 \end{aligned}$$

(8) اگر معادله ی حرکت یک ذره $s = 20 + 30t + 3t^2$ باشد، سرعت و شتاب ذره را در $t = 2$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = 30 + 6t & \Rightarrow & v(2) = 42 \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = 6 & \Rightarrow & a = 6 \end{aligned}$$

(9) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ ، آنگاه $\frac{dy}{dx} = y'$ را در هر مورد بیابید

$$1) \quad y = f(x + \sqrt{x}) \quad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \frac{2(x + \sqrt{x}) + 1}{2\sqrt{(x + \sqrt{x})^2 + (x + \sqrt{x})}}$$

$$2) \quad y = f(\cos x + \cot x)$$

$$y' = (-\sin x - (1 + \cot^2 x)) \frac{2(\cos x + \cot x) + 1}{2\sqrt{(\cos x + \cot x)^2 + (\cos x + \cot x)}}$$

$$3) \quad y = f\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \Rightarrow y = f\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)$$

$$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \frac{2\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)}}$$

$$4) \quad y = f\left(f\left(x^2\right)\right) \Rightarrow y' = 2xf'\left(x^2\right)f'\left(f\left(x^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2}} \cdot \frac{2\sqrt{x^4+x^2}+1}{\sqrt{\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2 + \sqrt{x^4+x^2}}}$$

(10) معادله های خطهای مماس و قائم بر منحنی هر یک از تابع های به معادله ی

زیر در نقطه ای به طول یک واقع بر منحنی را بنویسید.

$$1) \quad f(x) = (x^2 - 4x)^3$$

$$y = (1 - 4)^3 = 9$$

$$y' = 3(2x - 4)(x^2 - 4x) \Rightarrow y'(1) = 3(-2)(-3) = 18$$

$$y - 9 = 18(x - 1) \Rightarrow y = 18x - 9$$

$$2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 1}$$

$$y = \frac{1+1}{2-1} = 2$$

$$y' = 2 \frac{x(2x^2 - 1) - 4x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2(x-1)} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)^2}$$

$$y = \sqrt[3]{(1-2)^2} = 1$$

$$y = (x^2 - 2)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \times 2x(x^2 - 2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y'(1) = -\frac{4}{3}$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$4) \quad f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow y = 2$$

(11) در تابع به معادله $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ اگر y' و y'' مشتقات مرتبه اول و دوم لا باشند،

ثابت کنید رابطه $2y'^2 - yy'' = y^4$ برقرار است.

(حل)

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow 2yy' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow yy' = -xy^4 \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -x$$

$$\Rightarrow y \frac{y^3 - 3(y')^2 y^2}{y^6} = -1 \Rightarrow y''y - 3(y')^2 = -y^4$$

$$\Rightarrow 3(y')^2 - yy'' = y^4$$

(12) در تابع به معادله $y = \frac{x^2+1}{x}$ ثابت کنید $xy'' + 2y' = 2$

(حل)

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y'$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow xy'' = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2(1 - y') \Rightarrow xy'' + 2y' = 2$$

(13) فرض کنید $f, g : R \rightarrow R$ تابع های مشتق پذیر باشند و $g'(0) \neq 0$ و $f(0) = g(0) = 0$ ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(حل)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - 0}{x - 0}}{\frac{g(x) - 0}{x - 0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

(14) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \leq 0 \\ \frac{5}{2}x^2 - 4x & x > 0 \end{cases}$ تابع مشتق تابع را پیدا کنید.

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 5x - 4 & x > 0 \end{cases}$$

تابع مشتق تابع را

$$(15) \text{ فرض کنید. } f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (1-x)(2-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x) & x > 2 \end{cases}$$

بیابید.

(حل)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2-x-(1-x) & 1 \leq x \leq 2 \\ +1 & x > 2 \end{cases}$$

(16) مشتق هر یک را تعیین کنید.

$$1) \quad y = \frac{\tan x}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y = \tan x \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow y' = \sec^2 x \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \cdot \tan x$$

$$2) \quad y = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-1}{1 + \sin x}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad y = \sqrt{\text{Arc cot } \frac{x}{2}} &\Rightarrow y' = \frac{\frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{x^2}{4}}}{\sqrt[2]{\text{Arc cot } \frac{x}{2}}} \\
 &\Rightarrow y' = \frac{-1}{(4 + x^2)\sqrt{\text{Arc cot } \frac{x}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad y &= \text{Arc tan}(x - \sqrt{1 + x^2}) \\
 y' &= \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{1 + (x - \sqrt{1 + x^2})^2} = \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)}{\sqrt{1 + x^2}(1 + (x - \sqrt{1 + x^2})^2)}
 \end{aligned}$$

$$5) \quad y = \text{Arc sin } \frac{1}{|x|} \Rightarrow y' = \begin{cases} \text{Arc sin } \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\text{Arc sin } \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & x > 0 \\ \frac{\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & x < 0 \end{cases}$$

$$6) \quad \sin xy + \cos xy = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y \cos xy - y \sin xy}{x \cos xy - x \sin xy} = -\frac{y}{x}$$

$$7) \quad x y = \operatorname{Arctg} \frac{x}{y} \Rightarrow y \tan(xy) - x = 0$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{y^2 \sec^2(xy) - 1}{\tan(xy) + xy \sec^2(xy)}$$

$$8) \quad x - y = \operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arc} \cos y$$

$$\operatorname{Arc} \sin x - \operatorname{Arc} \cos y - x + y = 0$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 1}$$

(17) فرض کنید $f(x) = \sin(n \operatorname{Arc} \sin x)$. ثابت کنید.

$$(1-x^2)f''(x) - x f'(x) + n^2 f(x) = 0$$

حل) $\operatorname{Arc} \sin$ را دو طرف اثر می دهیم:

$$\operatorname{Arc} \sin f(x) = n \operatorname{Arc} \sin x \quad \text{مشتق} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{(f'(x))^2}{1-(f(x))^2} = \frac{n^2}{1-x^2} \quad \Rightarrow (1-x^2)(f'(x))^2 = n^2(1-f^2(x))$$

$$\text{مشتق} \Rightarrow 2(1-x^2)f''(x)f'(x) - 2x(f'(x))^2 = -2n^2 f'(x)f(x)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)f''(x) - x(f'(x)) + n^2 f(x) = 0$$

$$(18) \text{ فرض کنید } x \in R \quad f(x) = [x] \sin^2 px \quad \text{تابع مشتق } f \text{ راییبید.}$$

$$\text{حل) چون } \lim_{x \rightarrow n} \sin^2 px = 0 \text{ برای هر } n \text{ صحیح در تمام نقاط پیوسته است.}$$

$$(19) \text{ فرض کنید } f(x) = \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^3 \right| \quad \text{تابع مشتق } f \text{ راییبید.}$$

(حل)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right| \\ &= \left| \left(x^2 - 1 \right)^2 (x+1)^2 (x+1) \right|^{x+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= 2(2x(x+1) + (x^2-1))((x^2-1)(x+1))|(x+1)| \\ &\quad + ((x^2-1)(x+1)) \frac{|x+1|}{x+1} \end{aligned}$$

$$(20) \text{ فرض کنید } f: R \rightarrow R, \quad n \text{ مرتبه مشتق پذیر باشد. ثابت کنید.}$$

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

(حل) با استقرا روی n این مطلب را نشان می دهیم:

$$n=1 \quad \Rightarrow (f(ax+b))' = af'(ax+b)$$

$$k=n \quad \Rightarrow (f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

با مشتق گیری از دو طرف فرض داریم:

$$[f(ax+b)]^{(n+1)} = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b)$$

پس حکم برقرار است.

(20) در هر مورد مشتق مرتبه n ام تابع داده شده را به دست آورید.

$$1) \quad y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$2) \quad y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$3) \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y^{(n)} = \sin 2x \left(x + n\frac{p}{2}\right) \Rightarrow y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + n\frac{p}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad y = \cos^2 x &\Rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{2} \times 2^n \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right) \\ &= 2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad y = \frac{1+x}{1-x} \quad & y' = \frac{-2}{(1-x)^2}, \quad y'' = \frac{4}{(1-x)^3} \\ & y''' = \frac{-12}{(1-x)^4}, \quad y^{(4)} = \frac{48}{(1-x)^5} \\ & \dots\dots\dots y^{(n)} = (-1)^n \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

(22) مقادیر c, b را طوری تعیین کنید که نمودار $y = x^2 + bx + c$ در نقطه $A(1,1)$ بر

خط $y = x$ مماس باشد.

(حل) $(1, 1)$ روی نمودار قرار دارد پس $1 = 1 + b + c$

از طرفی شیب برابر ۱ است پس داریم $1 = 2 + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ b = -1 \end{cases} \rightarrow c = 1$$

(23) در چه نقاطی از منحنی $y = x^3 + x - 2$ خط مماس بر منحنی موازی خط $y = 4x - 1$ است؟

(حل) باید $y'(x) = 4$ باشد پس

$$3x^2 + 1 = 4 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

(24) معادله ی مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 - 5$ را بنویسید که بر خط $2x - 6y + 1 = 0$ عمود باشد.

$$(حل) \quad 6y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$$

پس شیب خط داده شد برابر $\frac{1}{3}$ است لذا شیب خط مماس برابر ۳ - است پس

$$3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$y'(-1) = 3 - 6 = -3 \Rightarrow y + 3 = -3(x+1) \Rightarrow y = -3x - 6$$

(25) در مورد تابع $f: R \rightarrow R$ میدانیم $|f(x)| \leq x^2, x \in R$ ثابت کنید f در $x = 0$

مشتق پذیر است $f'(0)$ را بیابید.

(حل)

$$|f(x)| \leq x^2 \Rightarrow |f(x)| \leq |x|^2 \Rightarrow -|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|$$

از طرفی داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} (-1x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1x = 0$ پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0) = 0$$

$$(26) \text{ در مورد تابع } f: R \rightarrow R \text{ می دانیم } -1x \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x| \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x| \text{ آیا}$$

می توانیم نتیجه بگیریم که f در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است؟(حل) خیر؛ مثلاً $f(x) = |x|$ را در نظر بگیرید این تابع در $x = 0$ مشتق ندارد.

$$(27) \text{ اگر } f(x) = [x] \sin x \text{ مقدار } f\left(\frac{p}{4}\right) \text{ را حساب کنید.}$$

$$(حل) \text{ چون } 0 < \frac{p}{4} < 1 \text{ است پس } f\left(\frac{p}{4}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{p}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{p}{4}\right)}{x - \frac{p}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{[x] \sin x}{x - \frac{p}{4}} = 0$$

$$(28) \text{ اگر } f: R \rightarrow R \text{ یک تابع و } f'(a) \text{ موجود باشد، حاصل}$$

۳۰ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} \text{ را حساب کنید.}$$

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a-h)}{h} &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= 2f'(a) + f'(a) = 3f'(a) \end{aligned}$$

(29) اگر به ازای $|x| < 1$ ، $x \leq f(x) \leq x + x^2$ مقدار $f'(0)$ را حساب کنید.

(حل) با توجه به نامساوی داریم: $0 < f(0) \leq 0$ پس $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\text{زیرا } 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1+x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h}, \quad f'(a) = 4, \quad f(a) = 0 \text{ اگر (30) را}$$

حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} &= \frac{2}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{5h} \\ &= \frac{2}{5} f'(a) = 4 \Rightarrow f'(a) = 10 \end{aligned}$$

(31) اگر f بر R دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $g(x) = f(xf(x))$ آنگاه $g''(0)$ را

حساب کنید.

حل) قرار دهید:

$$\begin{aligned} u(x) &= xf(x) \Rightarrow u(0) = 0 \\ u'(x) &= f(x) + xf'(x) \Rightarrow u'(0) = f(0) \\ g(x) &= f(u) \Rightarrow g'(x) = u' f'(u) \\ g''(x) &= u''f'(u) + (u')^2 f''(u) \\ \Rightarrow g''(0) &= 2f'(0)f'(0) + (f(0))^2 f''(0) \\ \Rightarrow g''(0) &= 2(f'(0))^2 + (f(0))^2 f''(0) \end{aligned}$$

(۳۲) اگر توابع f و g بر R مشتق پذیر باشند و

$$2g'(-2) = f(a) = f'(a) = -2$$

مقدار $(g \circ f)'(a)$ را حساب کنید.

حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = (-1)(-2) = 2 \end{aligned}$$

(33) اگر $\begin{cases} x = (t+2)^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را به ازای $t = 3$ حساب کنید.

حل)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2(t+2)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(3) = \frac{27}{2 \times 5} = \frac{27}{10}$$

(34) اگر $f'(1) = f(1) = -2$ و $g'(-2) = 3$ ، حاصل $(g \circ f)'(1)$ را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(1) &= g'(f(1)) \cdot f'(1) \\ &= g'(-2) \cdot (-2) = 3 \times (-2) = -6 \end{aligned}$$

(35) اگر f تابعی مشتق پذیر در a باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ را حساب کنید.

(حل) مقدار $xf(x)$ را به صورت اضافه و کم کنید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - xf(x) + xf(x) - af(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \frac{x - a}{x - a} - x \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) - af'(a) \end{aligned}$$

(36) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار منحنی پارامتری به معادله $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$ در

$t = 2$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2) &= \frac{4 \times \sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

فصل چهارم

کاربرد مشتق

14-2-4 تمرین صفحه 290

(1) ابتدا نشان دهید که هریک از توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه رل صدق می کند. پس مقدار c مربوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad x \in [-1, 2] \quad (1)$$

حل) چند جمله ای ها روی هر بازه شرایط قضیه رل را دارند. چون مشتق پذیرند و مشتق آنها نیز چند جمله ای است.

$$f(2) = f(-1) = 0$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

$$c = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$x \in [-4, 0] \quad f(x) = x^3 - 16x \quad (2)$$

حل :

$$f(-4) = -64 + 64 = 0 = f(0)$$

$$f'(c) = 3c^2 - 16 = 0 \Rightarrow c = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x \in [0, 4] , \quad f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$$

(3)

پس تابع روی $[0, 3]$ پیوسته و روی $(0, 3)$ مشتق پذیر است.

$$f(0) = 0 = f(3) = 3\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}c^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}} = \frac{4c-3}{3c^{\frac{2}{3}}} = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{1}{4}}, \quad x \in [0, 4] \quad (4)$$

حل:

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$$

پس تابع f روی $[0, 4]$ پیوسته و روی $(0, 4)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{3}{4}c^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}c^{-\frac{3}{4}} = 0$$

$$\frac{3}{4c^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2c^{\frac{3}{4}}} = \frac{3c^{\frac{1}{2}} - 2}{4c^{\frac{3}{4}}} = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{4}{9}$$

$$x \in [-3, 7], \quad f(x) = \begin{cases} x+3 \rightarrow x \leq 2 \\ 7-x \rightarrow x > 2 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow x \leq 2 \\ -1 \rightarrow x > 2 \end{cases}$$

(حل) این تابع در 2 پیوسته است، پس همه جا پیوسته است و

پس در 2 مشتق پذیر نیست. لذا شرایط را ندارد.

٤ حل المسائل ریاضی عمومی (١)

$$x \in [-3, 4], f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 3} \quad (6)$$

حل) تابع در $[-3, 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in [2, 3] \quad (7)$$

حل)

$$f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

$$f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11 = 0$$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{12}}{24} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$f(x) = (x - p) \sin x, x \in [0, p] \quad (8)$$

حل) چند جمله ای و $\sin x$ همه جا پیوسته و مشتق پذیرند.

$$f(0) = 0 = f(p)$$

$$f'(c) = \sin c + (c - p) \cos c = 0$$

$$\Rightarrow \sin c = (p - c) \cos c$$

$$\Rightarrow \tan c = p - c$$

$$\Rightarrow c + \tan c = p$$

واضح است که $c = p$ جواب در این بازه است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 \rightarrow x < 2 \\ 5x - 4 \rightarrow x \geq 2 \end{cases} \rightarrow x \in [-3, 4] \quad (9)$$

حل) این تابع در $[-3, 4]$ پیوسته نیست چون

فصل چهارم: کاربرد مشتق

۵

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 9) = -5 \neq f(2) = 6$$

پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}, \quad x \in [-2, 4] \quad (10)$$

حل) این تابع در $[-2, 4]$ پیوسته نیست، پس شرایط قضیه برقرار نیست.

(2) اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ باشد، به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \text{در بازه } (0, 1) \text{ حداقل یک ریشه دارد.}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 1 = 0 \quad \text{حل)}$$

تابع چند جمله ای در قضیه رل صدق می کند، پس در $(0, 1)$ حداقل یک c وجود دارد که

$$f'(c) = 4c^3 - 6c^2 + 4c - 1 = 0$$

(3) به کمک قضیه رل ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = 0$ ، که در آن c یک ثابت

دلخواه است، نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

$$\text{حل) اگر } f(x) = x^3 + 2x + c \text{ بیش از یک ریشه داشته باشد } f'(x) = 3x^2 + 2$$

حداقل یک ریشه دارد که تناقض است.

(4) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید معادله $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$

دقیقا یک ریشه در بازه $(0, 1)$ دارد.

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۶

حل) $f(0)f(1) < 0$ پس $f(0) = -3$ و $f(1) = 1$ طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک

ریشه در $(0, 1)$ دارد. از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$.

چون $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقا یک ریشه دارد.

5) ابتدا نشان دهید توابع داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می کنند. سپس مقدار c مربوطه را بدست آورید.

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0, 1] \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{حل})$$

پس f روی $[0, 1]$ پیوسته و روی $(0, 1)$ مشتق پذیر است.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c}} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{8}{27}$$

(2)

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}, \quad x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$$

حل) تابع داده شده روی $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ پیوسته روی $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ مشتق پذیر است،

$$f'(c) = -\frac{1}{(c-1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{f(3) - f(\frac{3}{2})}{3 - \frac{3}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{(c-1)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow (c-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = 0$$

(3)

$$x \in [-1, 5]$$

$$\begin{cases} 2x+3, & x < 3 \\ 15-2, & x \geq 3 \end{cases}$$

حل) تابع در 3 مشتق پذیر نیست، چون $f'_-(3) = 2$ و $f'_+(3) = -2$ ، پس شرایط قضیه را ندارد.

$$x \in [-4, 5], \quad f(x) = 3(x-4)^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

حل) $f'(x) = 2(x-4)^{-\frac{1}{3}}$ ، در $x \in [-4, 5]$ مشتق پذیر نیست، پس شرایط برقرار نیست.

$$x \in [-5, 0], \quad f(x) = \frac{x^2-3}{x+3} \quad (5)$$

تابع در $x \in [-5, 0]$ پیوسته نیست پس شرایط قضیه برقرار نیست.

$$x \in [-1, 5], \quad f(x) = x^2 + 7x - 1 \quad (6)$$

حل) چون f چند جمله ای است، شرایط برقرار است. پس

$$2c + 7 = \frac{f(5) - f(-1)}{6} = \frac{49 - 7}{6} = 7$$

$$\Rightarrow c = 0$$

(6) نشان دهید هر چند جمله ای از درجه 3 حداکثر 3 ریشه حقیقی دارد.

حل) چون مشتق چندجمله ای درجه 3، چندجمله ای درجه 2 است و حداکثر 2 ریشه دارد پس چندجمله ای درجه 3 حداکثر 3 ریشه دارد.

(7) نشان دهید معادله $x^5 + 3x^3 + x + 13 = 0$ دارای بیش از یک ریشه حقیقی نیست.

حل) چون درجه چند جمله ای فرد است، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس چند جمله ای داده شده، دقیقاً یک ریشه دارد.

(8) نشان دهید معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$ برای $n \in \mathbb{N}, a > 0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حل) چون چندجمله ای از درجه فرد است، حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = (2n+1)x^{2n} + a$ و $a > 0$ ، پس $f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد، پس معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(9) نشان دهید $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ هیچ ریشه ای ندارد پس معادله دقیقاً یک ریشه دارد.

(10) نشان دهید

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0)$$

حل) تابع $f(t) = \ln(1+t)$ را روی بازه $[0, x]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه

مقدار میانگین را دارد، پس:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$0 < c < x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$c < x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln(1+x)$$

$$0 < c \Rightarrow \frac{1}{1+0} = 1 > \frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

(11) نشان دهید.

$$(x > 0), \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

حل) کافی است در تمرین قبل به جای x قرار دهیم $\frac{1}{x}$ داریم:

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(12) اگر f بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه بسته باز

(1 و 0) موجود و صعودی باشد، نشان دهید که $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه (1 و 0)

صعودی است.

حل) برای $0 < x < 1$ طبق قضیه مقدار میانگین داریم:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(cx)$$

$$0 < x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow cx_1 \leq cx_2$$

$$f' \Rightarrow f'(cx_1) \leq f'(cx_2) \text{ صعودی است } f'$$

$$\Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow g \text{ صعودی است } g$$

$$(13) \text{ فرض کنید } f'(x) = \frac{x}{1+x^2} \text{ . ثابت کنید به ازای هر } a \text{ و } b \text{ متمایز داریم:}$$

$$\left| f(b) - f(a) \right| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

(حل)

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 1 - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \geq \frac{1}{2} \text{ پس } 2x^2 \leq (1+x^2)^2 \text{ از طرفی. لذا}$$

$$f'(x) \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حال اگر a و b متمایز و دلخواه باشد.

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

$$(14) \text{ اگر } 0 < b \leq a < \frac{p}{2} \text{ باشد، نشان دهید که:}$$

$$\frac{a-b}{\cos^2 b} \leq \tan a - \tan b \leq \frac{a-b}{\cos^2 a}$$

حل) تابع $f(x) = \tan x$ را روی بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید.

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس:

$$\frac{\tan a - \tan b}{a - b} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

چون $b < c < a$ و $\frac{1}{\cos^2 x}$ تابعی صعودی است. پس

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{1}{\cos^2 c} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

لذا

$$\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{\tan a - \tan b}{a - b} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$$

(15) درستی قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در فاصله $[0, 2]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

حل) پس تابع همه جا خصوصاً روی $[0, 2]$ پیوسته است. از

طرفی:

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 1, \quad f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

پس مشتق f همه جا خصوصا روی $(0, 2)$ موجود است. لذا شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

(16) ثابت کنید که معادله $x = 2^{-x}$ یک و تنها ریشه در بازه $(0, 1)$ دارد.

حل) از $x = 2^{-x}$ نتیجه می گیریم $\text{Log}_2 x = -x$

حال تابع $f(x) = \text{Log}_2^x + x$ را روی فاصله $(0, 1)$ در نظر بگیرید.

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ ریشه ای در } f \text{ دارد.}$$

از طرفی $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} + 1$ هیچ ریشه ای ندارد. پس $\text{Log}_2^x = x$

دقیقا یک ریشه دارد، لذا $x = 2^{-x}$ دقیقا یک ریشه در $(0, 1)$ دارد.

(17) قضیه رل را بیان کرده با استفاده از آن نشان دهید که معادله $x^3 + x - 1 = 0$ یک

و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

حل) اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$

آنگاه $c \in (a, b)$ موجود است که $f'(c) = 0$.

چون معادله داده شده از درجه فرد است پس حداقل یک ریشه دارد.

از طرفی $f'(x) = 3x^2 + 1$ هیچ ریشه ای ندارد، پس طبق قضیه رل $f(x)$ نمی تواند

بیش از یک ریشه داشته باشد.

(18) با استفاده از قضیه رل ثابت کنید بین هر دو ریشه حقیقی معادله $e^x \sin x = 1$ حداقل یک ریشه $e^x \cos x = -1$ قرار دارد.

(حل) $e^x \sin x = 1$ معادل است با $\sin x = e^{-x}$ و $e^x \cos x = -1$ معادل است با $\cos x = -e^{-x}$

حال تابع $f(x) = \sin x - e^{-x}$ را در نظر بگیرید. این تابع شرایط قضیه رل را داراست و $f'(x) = \cos x + e^{-x}$

بنابراین بین هر دو ریشه $f'(x)$ وجود دارد.

یعنی بین هر دو ریشه $\sin x = e^{-x}$ یک ریشه از $\cos x = -e^{-x}$ وجود دارد.

(19) با استفاده از قضیه مقدار میانگین ثابت کنید. $0 < x \leq 1 \quad \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq \frac{1}{a+1}$

(حل) طبق تمرین (11) برای $x > 0$ داریم $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$ است.

حال اگر $0 < x \leq 1$ آنگاه $\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{1+x}$ بنابراین:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(20) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی $a \geq 1$

رابطه زیر برقرار است. (به شرط آنکه $(z+1) > 0$ باشد).

$$z \geq 0 \quad (1+z)^a \geq 1+az$$

(حل) تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی فاصله $[0, z]$ در نظر بگیرید

این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس $0 < c < z$ موجودات که

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+z)^a - az - 1}{z} = a(1+c)^{a-1} - a \geq 0$$

چون $c > 0$ است پس $(1+z)^a \geq 1+az$

اگر $z < 0$ تابع $f(x) = (1+x)^a - ax$ را روی $[z, 0]$ در نظر می گیریم

$$\frac{f(0) - f(z)}{0 - z} = f'(c)$$

$$\frac{1 - (1+z)^a + az}{0 - z} = (1+c)^a - a \leq 0$$

$$\Rightarrow 1+az \leq (1+z)^a$$

(21) با استفاده از قضیه رل نشان دهید که مشتق تابع $f(x) = x^4 - 8x^2 - 12x$ فقط

یک ریشه در $[-1, 1]$ دارد.

(حل)

$$f'(x) = 4x^3 - 16x - 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{12} \Rightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

ریشه های $f''(x)$ خارج $[-1, 1]$ قرار دارند پس $f'(x)$ حداکثر یک ریشه در $[-1, 1]$

دارد.

از طرفی $f'(-1) = -4 + 16 - 12 = 0$ و این تنها ریشه تابع مشتق است.

(22) ثابت کنید که تابع $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 3x - 2$ در فاصله $[0, 1]$ تنها یک

ریشه دارد.

حل) $f(1) = 8 > 0$, $f(0) = -2 < 0$ پس حداقل یک ریشه در $[0, 1]$ دارد. از طرفی:

$$f'(x) = 20x^4 + 9x^2 + 3 > 0$$

$f'(x)$ هیچ ریشه ای ندارد پس $f(x)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

(23) فرض کنید $f(x)$ روی $[0, 1]$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید عددی مانند

$$c, 0 < c < 1 \text{ وجود دارد به طوری که } c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

حل) تابع $h(x) = x^2 f(x)$ را روی فاصله $[0, 1]$ در نظر بگیرید این تابع شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0 < c < 1, \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h'(c)$$

$$0 < c < 1, \frac{f(1) - 0}{1} = c^2 f'(c) + 2cf(c)$$

$$\Rightarrow c^2 f'(c) + 2cf(c) = f(1)$$

8-3-4 تمرین صفحه 300.

(1) تعیین کنید توابع زیر روی چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

$$1) \quad f(x) = -x^5 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 5x^4 - 4 = -(5x^4 + 4) < 0$$

f همواره نزولی است.

$$2) \quad f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$

تابع روی $[1, +\infty)$ تابع صعودی روی $[0, 1]$ نزولی

روی $[-1, 0]$ تابع صعودی و روی $[-\infty, -1]$ نزولی است.

$$3) \quad f(x) = \frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(x-1)^2 - 2(x-1)(-x+2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)(-x+1+2x-4)}{(x-1)^4} = \frac{(x-3)}{(x-1)^3}$$

تابع روی $(1, 3)$ نزولی و روی $(3, +\infty)$ و $(-\infty, 1)$ صعودی است.

$$4) \quad f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

تابع روی $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ صعودی و روی $(-\infty, -\sqrt{2})$ و $(\sqrt{2}, +\infty)$ نزولی است.

$$5) \quad f(x) = [x]$$

تابع جزء صحیح همه جا صعودی است.

$$6) \quad f(x) = |x| - |x+1|$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \rightarrow x < -1 \\ -2x-1 \rightarrow -1 \leq x < 0 \\ -1 \rightarrow 0 \leq x \end{cases}$$

$$7) \quad \begin{aligned} f(x) &= x + \cos x \\ f'(x) &= 1 - \sin x \geq 0 \end{aligned}$$

همواره صعودی است.

$$8) \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

تابع روی $(-1, 1)$ صعودی و روی $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.

$$9) \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) < 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{تابع همواره نزولی است. چون}$$

$$10) \quad f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2}$$

تابع روی $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ نزولی و روی $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ و $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ صعودی است.

$$11) \quad f(x) = x\sqrt{5-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}} = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

تابع روی $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ صعودی و روی $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$ و $\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ نزولی است.

$$12) \quad f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$f'(x) = -(x-1)^{-\frac{2}{3}} < 0 \Rightarrow$ همواره نزولی است

$$13) \quad f(x) = x^3(x-2)^2$$

$$f'(x) = 3x^2(x-2)^2 + 2x^3(x-2) = x^2(x-2)(3x-6+2x) = x^2(x-2)(5x-6)$$

تابع روی $\left(-\infty, \frac{6}{5}\right)$ و $(2+\infty)$ صعودی و روی $\left(\frac{6}{5}, 2\right)$ نزولی است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x + \cos x - 2 \\ f'(x) &= -\sin 2x - \cos x = -\cos x(2\sin x + 1) \\ &= -2\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$0 < x < \frac{p}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{p}{2} < x < p \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

$$p < x < \frac{7p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{7p}{6} < x < \frac{3p}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

$$\frac{3p}{2} < x < \frac{11p}{6} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{تابع نزولی}$$

$$\frac{11p}{6} < x < 2p \Rightarrow f'(m) > 0 \Rightarrow \text{تابع صعودی}$$

$$(2) \text{ با فرض } 0 < x < \frac{p}{2}, \text{ نامساوی های زیر را ثابت کنید.}$$

$$\sin x < x \quad (\text{الف})$$

حل) تابع $f(t) = \sin t$ را روی $[0, x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد پس.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = \cos c < 1 \Rightarrow \sin x < x$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad (\text{ب})$$

حل) تابع $f(t) = \sin t + \frac{t^3}{6}$ را روی فاصله $[0, x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\sin x + \frac{x^3}{6}}{x} = \cos c + \frac{c^2}{3} > 1 \Rightarrow \sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

(3) نشان دهید.

$$(x > 0)$$

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } t < x$$

حل) تابع $f(t) = \text{Arc tan } t$ را روی بازه $[0, x]$ در نظر بگیرید

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \Rightarrow \frac{\text{Arc tan } x - 0}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \quad \text{چون } 0 < c < x \text{ پس لذا داریم:}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\text{Arc tan } x}{x} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } x < x$$

(4) با فرض $f(x) = x - \text{Ln}(1+x)$ و $0 < x < 1$ نشان دهید.

۲۰ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

حل) تابع $f(t) = t - \ln(1+t)$ و $g(t) = t^2$ روی $[0, x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را دارند، پس داریم:

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{1+c}}{2c} \Rightarrow \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{c}{1+c} / 2c$$

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$$

از طرفی چون $0 < c < x < 1$ لذا داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2(1+c)} < \frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4} < \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$$

$$(x > 0) \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

(5) نشان دهید:

حل) به تمرین صفحه 292 مراجعه کنید.

$$\frac{2}{p}x < \sin x < x, 0 < x < \frac{p}{2}$$

(6) نامساوی زیر را ثابت کنید:

حل) نامساوی $\sin x < x$ در تمرین 2 قسمت الف نشان داده شد.

برای $x > 0$ تابع $f(t) = \sin t - \frac{2}{p}t$ را روی فاصله $\left[x, \frac{p}{2}\right]$ در نظر بگیرید، این تابع

شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد.

$$\frac{f(\frac{p}{2}) - f(x)}{\frac{p}{2} - x} f'(c) \Rightarrow \frac{0 - (\sin x - \frac{2}{p}x)}{\frac{p}{2} - x} = \cos c - \frac{2}{p} \Rightarrow \frac{\sin x - \frac{2}{p}x}{\frac{p}{2} - x} = \frac{2}{p} - \cos c$$

(7) اگر $0 < x < \frac{p}{2}$ باشد نشان دهید: $\tan x + \sin x > 2x$.

(8) فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و f'' در فاصله (a, b) همواره موجود و مثبت باشد. نشان دهید.

$$\forall x, y \in [a, b]: f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

(9) اگر f در بازه $[0, 1]$ پیوسته و $f(0) = 0$ و اگر $f'(x)$ بر بازه $(0, 1)$ موجود و

صعودی باشد. نشان دهید که $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ نیز بر بازه $(0, 1)$ صعودی است.

(حل) به تمرین 12 صفحه 292 مراجعه کنید.

نقاط بحرانی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$1) \quad f(x) = 4x^4 + 4x^3$$

$$f'(x) = 16x^3 + 12x^2 = 4x^2(4x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \left\{ 0, -\frac{3}{4} \right\}$$

$$2) \quad f(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4 + 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 - 4}{(x^2 + 4)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \{-2, 2\}$$

$$3) \quad f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

$$f'(x) = \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \left\{ kp + \frac{p}{2}, 2kp + \frac{p}{6}, 2kp + \frac{5p}{6} \right\}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -x + 3 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ -1 & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست، پس $x = 2$ نقطه بحرانی است.

$$\begin{aligned}
 5) \quad f(x) &= x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} \\
 f'(x) &= \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{7x^2 + 4x - 3}{3x^{\frac{2}{3}}} = 0 \rightarrow 7x^2 + 4x - 3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\left\{0, -1, \frac{3}{7}\right\} \Rightarrow \text{پس نقاط بحرانی}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad f(x) &= \sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)} \\
 f'(x) &= \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}
 \end{aligned}$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$$

به ازای $x = 2$ مشتق موجود است پس

$$\{0, -1\} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}$$

$$7) \quad f(x) = \frac{(x+1)}{(x^2 - 5x + 4)}$$

(حل)

$$D_f = R - \{1, 4\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4 - 2x^2 - 2x + 5x + 5}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = -1 \pm \sqrt{10} \Rightarrow \text{نقاط بحرانی}$$

$$8) \quad f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$$

$$D_f = [0, +\infty]$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3x-4}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \quad = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

نقطه بحرانی

21-3-4 تمرین صفحه 313

با استفاده از آزمون مشتق دوم نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \quad (1)$$

$$x = 0 \Rightarrow f''(0) = -6 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی}$$

$$x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{4}, \frac{3p}{4}$$

$$f''(x) = -\cos x \quad (2)$$

$$x = \frac{p}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{p}{4}\right) = -\cos\left(\frac{p}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی}$$

$$x = \frac{3p}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{3p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -4x^3 + 3x^2 + 18x \\
 f'(x) &= -12x^2 + 6x + 18 = -6(2x^2 - x - 6) = 0 \\
 \Rightarrow x &= \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 2, x = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -24x + 6 \\
 x = 2 &\Rightarrow f''(2) < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \\
 x = -\frac{3}{2} &\Rightarrow f''(-\frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 - 9x^2 + 27 \\
 f'(x) &= 6x^2 - 18x = 6x(x - 3) \Rightarrow x = 0, x = 3 \\
 f''(x) &= 12x - 18
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 x = 0 &\Rightarrow f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} \\
 x = 3 &\Rightarrow f''(3) = 18 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= 2x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 2\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow x = 1 \\
 f''(x) &= -x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{5}{2}}
 \end{aligned}$$

(5)

$$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

$$f(x) = (x-3)^4 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی دارد. } x = 3 \text{ در } f$$

(6)

(7)

$$f(x) = (x-4)^2 \sqrt{x} \Rightarrow D_f = [0, +\infty]$$

$$f'(x) = 2(x-4)\sqrt{x} + (x-4)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(x-4) + (x-4)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x=4, x=\frac{4}{5}$$

$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x}(10x-24) - \frac{1}{\sqrt{x}}(x-4)(5x-4)}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(10x-24) - (x-4)(5x-4)}{2x}$$

$$f''(4) = \frac{8 \times 16}{8} = 16 > 0 \Rightarrow f \text{ در } 4 \text{ مینیمم نسبی}$$

$$f''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\frac{8}{5} \times (-4)}{\frac{8}{5}} < 0 \Rightarrow f \text{ در } \frac{4}{5} \text{ ماکزیمم نسبی}$$

$$f(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}$$

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{9} = \frac{-81 + 2x^3}{9x^2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{81}{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{81}{2}} \quad (8)$$

مینیمم نسبی

$$f''(x) = \frac{18}{x^3} + \frac{2}{9} \Rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{81}{2}}\right) > 0 \Rightarrow$$

فصل پنجم

ضد مشتق

9-2-5 تمرین صفحه 350

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید:

$$\int (3x-2)^4 dx = \frac{1}{3} \int (3x-2)^4 3 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^5}{5} + c \quad (\text{الف})$$

$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} + c \quad (\text{ب})$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx \quad (\text{ج})$$

قرار دهید $u^2 = 1+x$ پس $2udu = dx$

$$\begin{aligned} \int (u^2-1)^2 2u^2 du &= 2 \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\ &= 2 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= 2 \left(\frac{(x+1)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{2(x+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + c \end{aligned}$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2-1} dx$$

$$u^2 = x^2 - 1 \Rightarrow 2udu = 2x dx \Rightarrow udu = x dx$$

$$\int (u^2+1)udu = \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + c = \frac{(x^2-1)^2}{4} + \frac{x^2-1}{2} + c \quad (\text{د})$$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

(ه)

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow 2 \int (u-1)^2 du = \frac{2}{3}(u-1)^3 + c$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^3 + c$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx = -\frac{1}{6} \times 2\sqrt{1-x^6} + c$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6} + c$$

(و)

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$u^2 = 1+x^2 \Rightarrow udu = xdx$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{1+(u^2-1)u^3}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1-u^3+u^5}}$$

(ز)

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+2)^3} = \int \frac{(x+1)dx}{((x+1)^2+1)^3}$$

$$u = (x+1)^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{4((x+1)^2+1)^2} + c$$

(ح)

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx; u = 2 \sin x \Rightarrow du = 2 \cos x dx$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = \frac{1}{4} \int \cot^2 x \cdot \csc^2 x dx = -\frac{1}{12} \cot^3 x + c$$

(ط)

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx$$

$$u = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \frac{du}{3} = (x^2 + 1)dx$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2} (x^3 + 3x + 1)^{\frac{2}{3}} + c$$

(ی)

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$u^3 = 1-x \Rightarrow -3u^2 du = dx$$

$$-3 \int (1-u^3)^2 u^3 du = -3 \int (u^3 - 2u^6 + u^9) du$$

$$= -3 \left(\frac{u^4}{4} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^{10}}{10} \right) + c$$

$$= -3 \left(\frac{(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{2(1-x)^{\frac{7}{3}}}{7} + \frac{(1-x)^{\frac{10}{3}}}{10} \right) + c$$

(ک)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} (x^3+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

(ل)

$$\int x^5 \sqrt{5-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{5-x^2} (-2x) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} (5-x^2)^{\frac{6}{5}} + c$$

(م)

(2) فرض کنید $f(x) = |x|$ و تابع F به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

۳۲ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

نشان دهید F یک ضد مشتق f روی $(-\infty, +\infty)$ است.

$$F'(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} = f(x) \quad (\text{حل})$$

13-3-5 تمرین صفحه 355.

انتگرال $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{(\sin x \cos x)^2} \\ &= \int \sec^4 x dx + 4 \int \frac{dx}{(\sin 2x)^2} = \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx + 4 \int \csc^2 2x \\ &= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} - 2 \cot 2x + c \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

20-3-5 تمرین صفحه 357.

(1) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\tan^2 x + 1) dx + \int dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \tan^6 x dx &= \int \tan^2 x \cdot \tan^4 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \tan^4 x dx \\ &= \int \tan^4 x \cdot \sec^2 x dx - \int \tan^4 x dx \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx \\
&= \int \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{\sin^9 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^9 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx \\
&= -\frac{1}{8 \sin^8 x} + \frac{1}{6 \sin^6 x} + c
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& \int \sec^4 x \cdot \cot^6 x dx = \int \frac{\sec^4 x}{\tan^6 x} dx = \int \frac{\sec^2 x (1 + \tan^2 x)}{\tan^6 x} dx \\
&= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^6 x} dx + \int \frac{\sec^2 x}{\tan^4 x} dx = -\frac{1}{5 \tan^5 x} - \frac{1}{3 \tan^3 x} + c
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^9 x} &= \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^9 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^9 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^7 x} dx \\
 &= \frac{1}{8\cos^8 x} - \frac{1}{6\cos^6 x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \left| \csc^4 x \cdot \cot^7 x dx - \left| \csc^2 x (\cot^2 x - 1) \cot^7 \right. \right. \\
 &= \int \cot^9 x \cdot \csc^2 x dx - \int \cot^7 x \cdot \csc^2 x dx \\
 &= -\frac{\cot^{10} x}{10} + \frac{\cot^8 x}{8} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \int \cos x \sec^2(\sin x) dx &= \int \frac{\sin x \cot x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{2 \cos x} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \int \sin^3 2x \cdot \cos^5 2x dx &= \int \sin 2x (1 - \cos^2 2x) \cos^5 2x dx \\
 &= \int \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx - \int \cos^7 2x \cdot \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{12} \cos^6 2x + \frac{1}{16} \cos^8 2x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad \int \frac{\tan x (1 + \tan x)^{10}}{\cos^2 x} dx &= \int u(1+u)^{10} du \\
 & \left(u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x} \right) \\
 &= \int ((u+1)^{11} - (u+1)^{10}) du = \frac{(\tan x + 1)^{12}}{12} - \frac{(\tan x + 1)^{11}}{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x + 2 \cos x + 1} &= \int \frac{\sin x \, dx}{(\cos x + 1)^2} \\
 (u = \cos x + 1 \Rightarrow -du = \sin x \, dx) \\
 &= -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\cos x + 1} + c
 \end{aligned}$$

(2) فرض کنید $In = \int \tan^n x \, dx$. یک فرمول بازگشتی برای محاسبه In بیابید، I_4 و I_6 را محاسبه کنید.
(حل)

$$\begin{aligned}
 In &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x \, dx = \int \tan^n x (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x \\
 &= \int \tan^{n-1} x \cdot \tan^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x (\sec^{n-2} x - 1) \, dx \\
 &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} + c \\
 \Rightarrow \quad In + I_{n-2} &= \frac{\tan^{n-1}}{n-1} + c \\
 I_2 &= \int \tan^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx = \tan x - x \\
 I_4 &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c \\
 I_6 &= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c
 \end{aligned}$$

(3) معادله دسته منحنی‌هایی را بیابید که ضریب زاویه خطوط مماس در هر نقطه (x, y)

از آن برابر $-\frac{\bar{x}}{y}$ باشد.

(حل)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \\ &\Rightarrow \int ydy = -\int xdx + c \end{aligned}$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c$$

معادله دسته مخفی‌ها، دوائر بر مرکز مبدأ مختصات است.

(4) معادله مخفی را بیابید که از نقطه (9, 2) گذشته و معادله ضریب زاویه مماس برخی $3x^2$ باشد.

$$y = 3x^2 \Rightarrow y = \int 3x^2 dx + c$$

$$y = x^3 + c$$

$$9 = 8 + c \Rightarrow c = 1$$

$$y = x^3 + 1$$

(حل)

(5) معادله $y' - 2x = 0$ را حل کنید.

$$y' = 2x \Rightarrow y = \int 2x + c$$

$$\Rightarrow y = x^2 + c \quad (\text{حل})$$

(6) مشتق تابعی برابر $\sqrt{x+3}$ است. هرگاه مقدار به ازای $x=1$ برابر 1 باشد، تابع را بیابید.

$$\begin{aligned}
 y' = \sqrt{x+3} &\Rightarrow y = \int \sqrt{x+3} + c \\
 &\Rightarrow y = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c \\
 (1, 1) &\Rightarrow 1 = \frac{2}{3} \times 4 \times 2 \times c \Rightarrow c = -\frac{13}{3} \\
 y &= \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} - \frac{13}{3} \quad (\text{حل})
 \end{aligned}$$

(7) هر یک از انتگرالهای زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \int \frac{\sin x \, dx}{(1 + \cos x)^2} &= -\frac{1}{1 + \cos x} + c \\
 \int \cos^6 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)^3 \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad &= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \left(\int dx + 3 \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx + \int \cos 2x (1 - \sin^2 2x) \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left(x + \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{2} x + \frac{3}{8} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6} \right) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \, dx \\
 &= \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx - 2 \int \sin x \cdot \cos 4x \, dx + \int \sin x \cdot \cos^6 x \, dx \\
 &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{\cos^7 x}{7} + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \int \frac{\cos^3 3x}{\sqrt[3]{\sin 3x}} dx &= \int \cos 3x (1 - \sin^2 3x) \sin^{-\frac{1}{3}} 3x dx \\
 &= \int \sin^{-\frac{1}{3}} 3x \cdot \cos 3x dx - \int \sin^{\frac{5}{3}} 3x \cdot \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sin^{\frac{2}{3}} 3x + \frac{1}{8} \sin^{\frac{8}{3}} 3x + c
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \int \sin 3y \cos 3y dy = \frac{1}{6} \sin^2 3y + c$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \int \cos t \cdot \cos 3t dt &= \frac{1}{2} \int (\cos 2t + \cos 4t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t + c
 \end{aligned}$$

$$7) \quad \int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \sin 5x = \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \sin 5x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x \cdot \cos 4x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\sin \frac{7}{2} x + \sin \frac{3}{2} x \right) dx - \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin x) dx \\
 &= \frac{-1}{7} \cos \frac{7}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3}{2} x + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int (2 \sin x \cos x)^4 dx \\
 &= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx = \frac{1}{32} \int (1 - \cos 4x)^2 dx \\
 &= \frac{1}{32} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx \\
 &= \frac{1}{32} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad \int \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\
 \left(u = 1 + \sin^2(x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = \sin(x-1) \cos(x-1) dx \right)
 \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u \sqrt{u} + c = \frac{1}{3} (1 + \sin^2(x-1)) \sqrt{1 + \sin^2(x-1)} + c$$

$$10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = 4 \int \frac{dx}{(2 \sin x \cos x)^2} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = -2 \cot 2x + c$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \int \sqrt{-1 + \sin^2(x-1)} \cdot \sin(x-1) \cos(x-1) dx \\
 = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \left(\cos \frac{13}{4} x + \cos \frac{7}{4} x + \cos \frac{11}{4} x + \cos \frac{9}{4} x \right) dx
 \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{13} \sin \frac{13}{4} x + \frac{4}{7} \sin \frac{7}{4} x + \frac{4}{11} \sin \frac{11}{4} x + \frac{4}{9} \sin \frac{9}{4} x \right) + c$$

$$12) \quad \int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \tan 3x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 3x} + c$$

$$13) \quad \int \frac{(\sin x + \cos x)}{\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)}} \quad u = \sin x - \cos x \Rightarrow du = (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \int \frac{dy}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{2}{3} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$14) \quad \int x^{n-1} \sin x^n dx \quad u = x^n \Rightarrow \frac{du}{n} = x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int \sin u du = -\frac{1}{n} \cos x^n + c$$

$$15) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx = \int \sin x \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$$

$$= \int \cos^{-\frac{3}{5}} x \cdot \sin x dx - \int \cos^{\frac{13}{5}} x \cdot \sin x dx$$

$$= -\frac{5}{2} \cos^{\frac{2}{5}} x + \frac{5}{18} \cos^{\frac{18}{5}} x + c$$

$$16) \quad \int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} dx = -\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c = \frac{1}{1 + \cos x} + c$$

$$17) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} \quad , \quad u = \sqrt{x} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$I = 2 \int \frac{du}{\sin^2 u} = -2 \cot(\sqrt{x}) + c$$

$$18) \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}, \quad u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{2} \tan x^2 + c$$

$$19) \quad \int \sin x (1 + \cos x)^5 dx = - \int u^5 du = - \frac{(1 + \cos x)^6}{6} + c$$

$$20) \quad \int \sin 2x \sqrt{2 + \sin^2 x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (1 + \sin^2 x) \sqrt{1 + \sin^2 x} + c$$

فصل ششم

انتگرال معین

7-1-6 نکریم صفحه 364

با استفاده تعریف حد، انتگرال تابع $f(x) = x^2$ را در فاصله $[0, 1]$ بیابید.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(حل)

2-2-6 تمرین صفحه 366.

در شی تساوی‌های زیر ثالث کنید.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(الف)

(حل) اگر $\{x_0, x_1, \dots, x_8\}$ افرازی از $[a, b]$ باشد آنگاه $\Delta y_i = \Delta x_i$ برای بازه

$[b, a]$ به کار می‌رود پس

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(D_i) \Delta x_i = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(D_i) \Delta y_i \\ &= \int_b^a f(x) dx \\ \int_b^a f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

(ب)

(حل) طبق خاصیت الف)

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= - \int_a^a f(x) dx \\ \Rightarrow 2 \int_b^a f(x) dx &= 0 \quad \Rightarrow \int_b^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

5-2-6 تمرین صفحه 368

قضیه 4-2-6. فرض کنید f در بازه‌ای شامل نقاط a, b, c پیوسته باشد در این صورت:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

اثبات) اگر $a < c < b$ ، اثبات تساوی از قضیه 3-2-6 حاصل می‌شود. بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $a < c < b$.

$$\Rightarrow \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

7-2-6. تمرین صفحه 369

قضیه 6-2-4. اگر f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a, b]$ ،

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad \text{آنگاه} \quad f(x) \geq g(x)$$

اثبات.

$$f(\mathbf{D}_i) \geq g(\mathbf{D}_i) \Rightarrow f(\mathbf{D}_i) \Delta x_i \geq g(\mathbf{D}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \lim \sum_{i=1}^n f(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i \geq \lim \sum_{i=1}^n g(\mathfrak{I}_i) \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

(2) اگر f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد و برای هر x در فاصله $[a, b]$ ،

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{اگر } f(x) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0$$

اثبات: طبق قضیه 4-2-6 داریم

(3) اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a, b]$ ، $f(x) < 0$ ، آنگاه:

$$\int_a^b f(x) dx < 0$$

(حل)

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b 0 dx = 0$$

12-2-6 تمرین صفحه 371.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \right) \quad (1) \text{ حد}$$

را به صورت یک انتگرال معین بنویسید.

(حل)

$$= 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 = 8 \int_0^1 x^2 dx \quad \text{حد}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} \quad (2) \text{ حد}$$

را به صورت انتگرال معین بنویسید.

(حل)

$$\begin{aligned}\lim \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} &= \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{i^2} = \lim \frac{n}{i^2} = \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\left(\frac{i}{n}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx\end{aligned}$$

(3) با استفاده از تعریف انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

(الف)

$$\int_{-1}^1 |x| dx$$

(حل)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |x| dx &= 2 \int_0^1 dx = 2 \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right) = 2 \lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1\end{aligned}$$

(ب)

$$J = \int_3^5 [x] dx$$

$$\int_a^b k dx = k(b-a) \quad \text{حل می‌دانیم پس}$$

$$\begin{aligned}J &= \int_3^4 [x] dx + \int_4^5 [x] dx = \int_3^4 3 dx + \int_4^5 4 dx \\ &= 3(4-3) + 4(5-4) = 3 + 4 = 7\end{aligned}$$

(4) اگر تابع f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد. ثابت کنید که:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(حل) چون برای هر $x \in [a, b]$ داریم: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ طبق قضیه

6-2-6 داریم:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

پس

(5) فاصله‌هایی را معین کنید که مقدار انتگرال‌های داده شده در آن فاصله قرار گیرد.

(الف)

$$\int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx$$

(حل) تابع $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ روی $[-1, 1]$ صعودی است پس

$$\max f(x) = f(1) = 2\sqrt{2}$$

$$\max f(x) = f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 f(x) dx \leq 2\sqrt{2}(2 - (-1))$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_{-2}^1 (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \leq 6\sqrt{2}$$

(ب)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$$

(حل) تابع $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x}$ روی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ است، چون ترکیب دو تابع صعودی

است پس

$$\max f(x) = 1$$

$$\min f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\bar{p}}{2} \leq \int_0^{\bar{p}} f(x) dx \leq \frac{\bar{p}}{2}$$

(ج)

$$\int_1^4 |x-2| dx$$

$$\max |x-2| = |4-2| = 2$$

$$\min |x-2| = |2-2| = 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^4 |x-2| dx \leq 6$$

(د)

$$\int_{-5}^2 \frac{x+5}{x-3} dx$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3} \quad \text{حل} \quad \text{نزولی است پس}$$

$$\max f(x) = f(-5) = 0$$

$$\min f(x) = f(2) = -7$$

$$\Rightarrow -49 \leq \int_{-5}^2 f(x) dx \leq 0$$

$$\int_0^1 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx \quad (6) \text{ بدون محاسبه انتگرال نشان دهید}$$

$$\text{حل} \quad \text{تابع} \quad f(x) = x - x^2 \quad \text{را در نظر بگیرید داریم:}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq x^2 \Rightarrow \int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$$

$$0 \geq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq x^2 \Rightarrow \int_0^2 x dx \leq \int_0^2 x^2 dx$$

(7) اگر f روی $[-1, 2]$ پیوسته باشد نشان دهید:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx = 0$$

حل) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx - \int_1^0 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

(8) اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، نشان دهید حداقل عددی نظیر

a در فاصله $[a, b]$ قرار دارد به طوری که $f(x) = 0$.

حل) طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرال داریم:

$$\min f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq \max f(x)$$

$$\min f(x) \leq \bullet \leftarrow \leq \max f(x)$$

پس

حال طبق قضیه مقدار میانی a وجود دارد که $f(a) = 0$ باشد.

(9) مثالی از یک تابع چنان ارائه دهید که ناپیوسته و قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ما

الف) برقرار نباشد. ب) برقرار باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

حل ب) تابع را در نظر بگیرید. داریم:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \Rightarrow \frac{\int_{-1}^1 f(x) dx}{2} = 0 = f(0)$$

(10) اگر f روی $[-1, 4]$ انتگرال پذیر باشد و مقدار متوسط تابع f روی $[-1, 4]$

$$\int_{-1}^4 f(x) dx$$

برابر 3 باشد، مقدار را بدست آورید.

حل)

$$\frac{\int_{-1}^4 f(x) dx}{5} = 3 \Rightarrow \int_{-1}^4 f(x) dx = 15$$

6-3-13 تمرین صفحه 378

1) فرض کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته و فرد باشد و ثابت کنید: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

حل)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_a^0 f(-x) (-dx) + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

2) در تمرین 1 اگر f زوج باشد، ثابت کنید که:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= 2 \int_0^a f(x) dx \\
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

(3) انتگرالهای زیر را حل کنید:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad \text{(الف)}$$

اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\sin u} + \sqrt{\cos u}} (-du) = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\sin u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du \\
 I + I &= 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sqrt{\cos u}}{\sqrt{\cos u} + \sqrt{\sin u}} du \\
 &= \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{p}{2}
 \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx \quad \text{(ب)}$$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $du = -dx$ و داریم:

$$I = - \int_{\frac{p}{2}}^0 \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du$$

$$I + I = 2I = \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^m u}{\sin^m u + \cos^m u} du + \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos^m u}{\cos^m u + \sin^m u} du = \int_0^{\frac{p}{2}} du = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{p}{4}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(t) = \int_{-2}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1+x^2}} dx$$

$$F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{\sin \sqrt{t}}{1 + \sqrt{1+t}}$$

الف)

$$F(t) = \int_a^g f(x) dx$$

$$F'(t) = g'(t) f(g(t))$$

ب)

$$F(t) = \int_{-x}^x |t| dt$$

$$F(x) = 2 \int_0^x t dt \Rightarrow F'(x) = 2x$$

ج)

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{3+t^4}$$

$$F(x) = 2 \int_0^x \frac{dt}{3+t^4} \Rightarrow F'(x) = \frac{2}{3+t^4}$$

د)

(5) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{3}$$

(6) در توابع ضمنی زیر $\frac{dy}{dx}$ را حساب کنید.

$$\int_0^y \cos^2 t dt + \int_0^x \sin^2 t dt = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin^2 t dt}{\frac{d}{dx} \int_0^y \cos^2 t dt} = - \frac{2x \sin^2 x^2}{\cos^2 y} \quad (\text{حل})$$

$$\int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0 \quad (\text{ب})$$

(حل)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d}{dx} \int_{\frac{p}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz}{\frac{d}{dy} \int_0^y \cos t dt} = - \frac{\sqrt{3 - 2 \sin^2 x}}{\cos y}$$

(7) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(حل) قرار می‌دهیم: $u = x - \frac{p}{2}$ پس $du = dx$ و

$$I = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\left(u + \frac{p}{2}\right) \cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

$$= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{u \cos u}{1 + \sin^2 u} du + \frac{p}{2} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

٥٤

$$\begin{aligned} &= p \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin^2 u} du = p \operatorname{Arc} \tan(\sin u) \bigg|_0^{\frac{p}{2}} \\ &= \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

$$I = \int_0^p \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx = 0 \quad (8) \text{ فرض کنید } K \text{ عددی صحیح باشد ثابت کنید:}$$

حل) قرار می دهیم $u = x - \frac{p}{2}$ پس $du = dx$ و

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2k(u + \frac{p}{2})}{\sin(u + \frac{p}{2})} du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin(2ku + p)}{\cos u} du \\ &= - \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin 2ku}{\cos} du = 0 \end{aligned}$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است.

(9) اگر در انتگرال $I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos}$ تغییر متغیر $x=2t$ را به کار ببریم داریم

$$I = \int_0^{2p} \frac{dx}{5 - 2\cos} = \int_0^0 \frac{2dt}{(1+t^2)(5 - \frac{1+t^2}{1-t^2})} = 0$$

واضح است که نتیجه درست نیست زیرا $\frac{1}{5-2\cos} > 0$ ، مورد اشتباه را بیابید.

حل) با تغییر $x=2t$ بازه $[0, 2p]$ به $[0, \frac{p}{2}]$ برده می شود که در حل مورد استفاده قرار نگرفته است.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \quad (10) \text{ فرض کنید } f(x) \text{ دلخواه باشد، ثابت کنید:}$$

حل) تابع $f(x)$ را می توان به صورت $f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

نوشت که $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوج و $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ فرد است، پس

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^a \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx + \int_{-a}^a \frac{f(x)-f(-x)}{2} dx \\ &= 2 \int_0^a \frac{f(x)+f(-x)}{2} dx + 0 = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx\end{aligned}$$

(11) انتگرال $I = \int_0^{2p} f(x) \cos x dx$ را با تغییر متغیر $t = \sin x$ تغییر دهید.

$$t = \sin x \Rightarrow x = \text{Arc sin } t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$I = \int_0^1 f(\text{Arc sin } t) dt + \int_1^0 f(\text{Arc sin } t) dt + \int_0^{-1} f(\text{Arc sin } t) dt + \int_{-1}^0 f(\text{Arc sin } t) dt$$

(12) درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx \quad (\text{الف})$$

حل) اگر قرار دهیم $u=a+b-x$ آنگاه $du=-dx$ و $u(a)=b$, $u(b)=a$ است، پس داریم:

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_b^a f(u)du = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t g(x)f(t-x)dx \quad (\text{ب})$$

حل) قرار دهید $u=t-x$ پس $du=-dx$ و $u(0)=t$, $u(t)=0$ پس داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x)g(t-x)dx &= -\int_t^0 f(t-u)g(u)du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du = \int_0^t g(x)f(t-x)dx\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx \quad (\text{ج})$$

حل) اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ پس $u(\frac{p}{2}) = 0$, $u(0) = \frac{p}{2}$, $du = -dx$ لذا داریم:

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^m x dx = - \int_{\frac{p}{2}}^0 \sin^m (\frac{p}{2} - u) du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m u du = \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^m x dx$$

(13) با توجه به مسأله 12 (ج) انتگرال های $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx$ و $\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx$ را محاسبه کنید.

حل) طبق مسأله قبل داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{p}{2}} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 x dx &= \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 x dx = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

(14) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^p f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\sin x) dx \quad (\text{الف})$$

حل)

اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ آنگاه $u(p) = -\frac{p}{2}$, $u(0) = \frac{p}{2}$, $du = -dx$ پس

$$\int_0^p f(\sin x) dx = - \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(\cos u) du = \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(\cos u) du = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx$$

علت آخری این است که $f(\cos u)$ تابعی زوج است.

$$\int_0^p x f(\sin x) dx = \frac{p}{2} \int_0^p f(\sin x) dx \quad (\text{ب})$$

(حل)

اگر قرار دهیم $u = \frac{p}{2} - x$ داریم $du = -dx$ ، $u(0) = \frac{p}{2}$ ، $u(p) = -\frac{p}{2}$ ، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^p x f(\sin x) dx &= -\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p}{2} - u\right) f\left(\sin\left(\frac{p}{2} - u\right)\right) du = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \frac{p}{2} f(\cos u) du \\ &= \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} u f(\cos u) du = p \int_0^{\frac{p}{2}} f(\cos x) dx \end{aligned}$$

چون تابع $f(\cos a)$ فرد و تابع $f(\cos u)$ زوج است.

(15) انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^p \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx$$

(حل)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^p \sqrt{\sin^2 x} dx = \int_0^p \sin x dx \\ &= -\cos x \Big|_0^p = 2 \end{aligned}$$

(16) هر یک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x dx = 2 \int_0^L \cos \frac{mp}{L} x dx = \frac{2L}{mp} \sin \frac{mp}{L} x \Big|_0^L = 0$$

(الف)

$$\int_{-L}^L \sin \frac{mp}{L} x dx = 0 \quad \text{تابع فرد است} \quad \text{ب)}$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{mp}{L} x = \sin \frac{mp}{L} x dx = 0 \quad \text{چون تابع فرد است.} \quad \text{ج)}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{2} \quad \text{اگر } G(x) = \int_1^x t dt, \quad F(x) = \int_0^x u du \quad \text{ثابت کنید}$$

(حل)

$$F(x) = \int_0^x u du$$

$$\Rightarrow F(x) - G(x) = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$G(x) = \int_1^x u du$$

(18) درستی های زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{الف)}$$

(حل)

$$\text{حد} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \quad \text{ب)}$$

(حل)

$$\text{حد} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right)$$

$$= \lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{p}{4}$$

$$\frac{2}{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{p}{n} + \sin \frac{2p}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)p}{n} \right)$$

(ج)

(حل)

$$\text{حد} = \frac{1}{p} \lim \sum_{i=1}^n \frac{p}{n} \sin p \left(\frac{i}{n} \right) = \frac{1}{p} \int_0^p \sin x dx = -\frac{1}{p} \cos x \Big|_0^p = \frac{2}{p}$$

(19) فرض کنید $B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$. اولاً تساوی $B(m, n) = B(n, m)$ را ثابت

کنید، ثانیاً ثابت کنید که

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} x \cdot \cos^{2n+1} x dx$$

(حل) اولاً اگر قرار دهیم $u = 1-x$ پس $du = -dx$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ پس داریم:

$$B(m, n) = - \int_0^1 (1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = B(n, m)$$

ثانیاً: اگر قرار دهیم $x = \sin^2 t$ آنگاه $dx = 2 \sin t \cos t dt$, $(1-x) = \cos^2 t$ و کرانهها به

$$\left[0, \frac{p}{2} \right]$$

تبدیل می شود. پس داریم:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m} t \cdot \cos^{2n} t \cdot 2 \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2m+1} t \cdot \cos^{2n+1} t dt$$

$$I = \int_3^6 xy \, dx \quad (20) \text{ با فرض } y = 2 \sin q, x = 6 \cos q, \text{ مطلوب است، محاسبه}$$

$$\text{حل) } dx = -6 \sin q \, dq \quad \text{اگر } x = 3 \quad \text{آنگاه } q = \frac{p}{6}$$

$$\text{اگر } x = 6 \quad \text{آنگاه } q = 0$$

$$\Rightarrow I = \int 6 \cos q \cdot 2 \sin q \cdot (-6 \sin q) \, dq = 72 \int \sin^2 q \cdot \cos q \, dq = \frac{72}{3} \sin^3 q \Big|_0^{\frac{p}{6}} = 24 \left(\sin^3 \frac{p}{6} - 0 \right) = \frac{24}{8} = 3$$

فصل هفتم

توابع غیر

جبری

27. 7 تمرین صفحه 387

مشابه آنچه در تعریف $\sin^{-1}$ بیان شد، تابع $\cos^{-1}$ را تعریف و سپس ثابت کنید

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(حل) تابع $y = \cos x$ روی $[0, p]$ نزولی است پس وارونه پذیر است

$$\cos x: [0, p] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\cos^{-1} x: [-1, 1] \rightarrow [0, p]$$

برای محاسبه مشتق داریم: $y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

27.25. تمرین صفحه 394.

1- ثابت کنید هرگاه $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$, $0 \leq x \leq 1$ در مورد $-1 \leq x \leq 0$

تساوی بالا چگونه بیان می شود؟

(حل)

$$y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y = \cos\left(\frac{p}{2} - y\right) \Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{p}{2} - y$$

$$\Rightarrow y + \cos^{-1} x = \frac{p}{2} \Rightarrow \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{p}{2}$$

این تساوی برای هر $-1 \leq x \leq 1$ برقرار است.

2- $y = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ مفروض است، مطلوب است:

$\cos y$, $\tan y$, $\cot y$, $\sec y$, $\csc y$

$$y = \frac{p}{6} \quad \text{حل) توجه کنید}$$

$$\cos y = \cos \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan y = \tan \frac{p}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot y = \cot \frac{p}{6} = \sqrt{3}, \quad \sec y = \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc y = \frac{1}{\sin y} = 2$$

(3) در تمرین های زیر مقدار دقیق کمیت داده شده را پیدا کنید.

الف)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\sec^{-1}(\frac{5}{3}) + \csc^{-1}(-\frac{13}{12})) &= \operatorname{tg}(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13})) = \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5}) - \sin^{-1}(-\frac{12}{13}))} \\ &= \frac{\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13})))}{\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})\cos(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) - \cos(\sin^{-1}(\frac{12}{13}))\sin(\sin^{-1}(-\frac{12}{13})))} \\ &= \frac{\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{12}{13}}{\frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13}} = \frac{\frac{12}{25} - \frac{60}{169}}{\frac{15}{65} - \frac{48}{65}} \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} \sin(\cos^{-1}(-\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(-\frac{1}{3})) &= \sin(p - \cos^{-1}(\frac{2}{3}) - 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) = \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}) + 2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) \\ &= \sin(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\cos(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) + \cos(\cos^{-1}(\frac{2}{3}))\sin(2\sin^{-1}(\frac{1}{3})) \\ &= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} \times (2(\sqrt{1 - \frac{1}{9}})^2 + 1) + \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times (\frac{16}{9} + 1) + \frac{4}{9} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned}\cos(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \sin^{-1}(\frac{-1}{4})) &= \cos(-\frac{p}{6} - \sin^{-1}(\frac{1}{4})) = \cos\frac{p}{6} \cos(\sin^{-1}(\frac{1}{4})) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{16}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3\sqrt{5}-1}{8}\end{aligned}$$

(4) مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \sin^{-1}(x^2) \\ f'(x) &= 2x \sin^{-1}(x^2) + \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin^{-1}(\cos x) \\ f'(x) &= \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -1\end{aligned}$$

د)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} \cos^{-1} x^2 + \sin^{-1} \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos^{-1} x^2 + \frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

ج)

$$f(x) = 3\sec^{-1}\frac{2}{x} + \csc^{-1}2x$$

$$f(x) = 3\cos^{-1}\frac{x}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$$

(هـ)

$$f(x) = x(\sec^{-1}2x)^2 \Rightarrow f(x) = x(\cos^{-1}\frac{1}{2x})^2$$

$$f'(x) = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 - 2x(\frac{-1}{2x^2}) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}} = (\cos^{-1}(\frac{1}{2x}))^2 + \frac{2}{\sqrt{4x^2-1}}$$

و)

$$f(x) = \csc^{-1}\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} = -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

(5) تساوی های زیر را تحقیق کنید.

$$A = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

$$|\sin^{-1}x + \sin^{-1}y| \leq \frac{p}{2} \quad \text{که در آن}$$

(حل)

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(\sin^{-1} y) = \sin(\sin^{-1} x) \cos(\sin^{-1} y) + \sin(\sin^{-1} y) \cos(\sin^{-1} x) \\ &= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \Rightarrow A = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\end{aligned}$$

$$tg^{-1}x + tg^{-1}y = tg^{-1} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{ب)}$$

(حل)

$$tg(tg^{-1}x + tg^{-1}y) = \frac{tg(tg^{-1}x) + tg(tg^{-1}y)}{1 - tg(tg^{-1}x) \cdot tg(tg^{-1}y)} = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow tg^{-1}x = tg^{-1}y + tg^{-1} \frac{x+y}{1-xy}.$$

(6) مقادیر زیر را با توجه به تمرین 5 تعیین کنید.

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} - \sin^{-1} \frac{3}{5} \quad \text{الف)}$$

(حل)

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \left(-\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{4}{5} \sqrt{1-\frac{9}{25}} - \frac{3}{5} \sqrt{1-\frac{16}{25}}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\right) = \sin^{-1} \left(\frac{7}{25}\right)$$

$$A = tg^{-1} \frac{1}{3} + tg^{-1} \frac{1}{4} + tg^{-1} \frac{2}{9} \quad \text{ب)}$$

(حل)

$$A = tg^{-1} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}} + tg^{-1} \frac{2}{9} = tg^{-1} \frac{7}{11} + tg^{-1} \frac{2}{9} = tg^{-1} \frac{\frac{7}{11} + \frac{2}{9}}{1 - \frac{14}{99}} = tg^{-1} \frac{85}{85} = \frac{p}{4}$$

(7) نشان دهید:

$$tg^{-1}x + tg^{-1}\frac{1-x}{x} = \begin{cases} \frac{p}{4} & x > -1 \\ -\frac{3p}{4} & x < -1 \end{cases}$$

حل) طبق؟؟؟

$$A = \cot^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$$

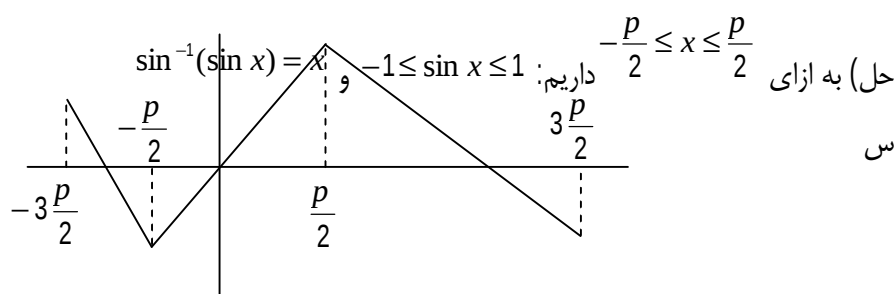
(8) عبارت را ساده کنید.

حل)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right) \Rightarrow A = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{p}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{p}{4}\right)}\right) = \cot^{-1}(\cot(x - \frac{p}{4})) = x - \frac{p}{4}$$

(9) تابع $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ را رسم و نشان دهید دوره تناوب آن $2p$ است.



طبق شکل دو فاصله های به طول $2p$ منحنی تکرار می شود.

(10) انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \int_{-\frac{3}{7}}^0 \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}} = \frac{1}{7} \sin^{-1}\left(\frac{7x}{6}\right) \bigg|_{-\frac{3}{7}}^0 = -\frac{1}{7} \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{7} \times \frac{p}{6}$$

$$2) \int_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-25}} = \frac{1}{3} \sec^{-1}\left(\frac{3x}{5}\right) \bigg|_{\frac{5\sqrt{2}}{3}}^{\frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \sec^{-1}(2) - \frac{1}{3} \sec^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{p}{9} - \frac{p}{12} = \frac{p}{36}$$

$$3) \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{3dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}}$$

$$= 3 \sec^{-1}(x+2) + c \quad \text{س}$$

$$4) \int \frac{\sec^2 dx}{9+tg^2 x} = \frac{1}{3} tg^{-1}\left(\frac{tgx}{3}\right) + c$$

$$5) \int_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) \bigg|_{\frac{2}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{p}{6} - \frac{p}{4}$$

(11) فرض کنید $x > -1$ ثابت کنید:

$$tg^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = tg^{-1}x - \frac{p}{4}$$

حل) طبق فرمول تمرین 6 داریم:

$$\begin{aligned}
 & tg^{-1}x - tg^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\
 &= tg^{-1} \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1-x \frac{1-x}{1+x}} = tg^{-1} \frac{\frac{1+x^2}{1+x}}{\frac{1+x^2}{1+x}} = tg^{-1}1 = \frac{p}{4}
 \end{aligned}$$

(12) نشان دهید که هر گاه $|x| < 1$ آنگاه:

$$\sin^{-1}x = tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$tg(\sin^{-1}x) = \frac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = tg^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

(حل)

$$tg^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(13) نشان دهید که

$$tg\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)}{\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = x$$

$$\Rightarrow tg^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

تمرین صفحه 404

1- انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

چون تابع زیر انتگرال فرد است:

$$f(-x) \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$$

2. مشتق چهارم $f(x) = x^2 \ln x$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

3. مشتق پنجم $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24}{x^5} - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{120}{x^6} + \frac{24}{x^5} + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

(حل)

4. با به کار گیری قضیه مقدار میانگین در مشتق نشان دهید که اگر $0 < a < b$ آنگاه

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

(حل) تابع $f(x) = \ln x$ روی بازه $[a, b]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست. پس داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < b$$

چون $a < c < b$ پس $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ در نتیجه:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

5. نشان دهید به ازای هر $x > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$$

حل) تابع $f(t) = \ln(1+t) - t$ روی فاصله $[0, x]$ شرایط قضیه مقدار میانگین را داراست پس:

$$0 < c < x, \quad f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \frac{1}{1+c} - 1 = \frac{-c}{1+c}$$

$$-\frac{x}{1+x} < \frac{-c}{1+c} < 0 \quad \text{چون } 0 < c < x \text{ پس}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{اگر } x < 1 \text{ آنگاه}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{-x}{1+x} \quad \text{اگر } x > 1 \text{ آنگاه}$$

$$-\frac{1}{2}x < \frac{\ln(1+x) - x}{x} < 0 \quad \text{پس}$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x \quad \text{لذا:}$$

6. انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

$$1) I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x \ln x (\ln(\ln x))}$$

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 2)$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^p \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx &= \ln(2 + \sin x) \Big|_0^{\frac{p}{2}} + \ln(2 + \sin x) \Big|_{\frac{p}{2}}^p \\ &= \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int_4^9 \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})\sqrt{x}} \quad u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow 2du &= \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2 \int_3^5 \frac{du}{u} = 2 \ln u \Big|_3^5 = 2 \ln \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \int_{-3}^0 \frac{dy}{y^2 + 3y - 4} &= \int_{-3}^0 \frac{dy}{(y+4)(y-1)} = \frac{1}{5} \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+4} \right) dy \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{y-1}{y+4} \right| \Big|_{-3}^0 = \frac{1}{5} (\ln \frac{1}{4} - \ln 4) \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

7. انتگرال های نامعین داده شده را محاسبه کنید.

$$1) \int \frac{1 + \ln x}{5 + x \ln x} dx \quad u = 5 + x \ln x \Rightarrow du = (1 + \ln x) dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln(5 + x \ln x) + c$$

$$2) J = \int \frac{4 \ln^3 x + 3}{x(\ln^4 x + 3 \ln x)} dx$$

$$u = \ln^4 x + 3 \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} (4 \ln^3 x + 3) dx$$

$$\Rightarrow J = \int \frac{du}{u} = \ln(\ln^4 x + 3 \ln x) + c$$

$$3) \int \frac{2x^3}{x^2 - 4} dx$$

$$u = x^2 - 4 \Rightarrow du = 2x dx, \quad x^2 = u + 4$$

$$I = \int \frac{(u+4)}{u} du = \int \left(1 + \frac{4}{u}\right) du = u + 4 \ln u + c$$

$$(x^2 - 4) + 4 \ln(x^2 - 4) + c$$

8. ثابت کنید به ازای هر $x > 0$, $x \neq 1$ داریم:

$$x - 1 - \ln x > 0, \quad 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

حل) اگر قرار دهیم $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$ آنگاه:

$$x > 1 \quad \left. \begin{array}{l} g(1) = f(1) = 0 \\ g'(x) = 1 > \frac{1}{x} = f'(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) < g(x)$$

$$x < 1 \quad g'(x) = 1 < \frac{1}{x} = f'(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$$

در نتیجه $\ln x < x - 1$

حال اگر به جای $\frac{1}{x}$ ، x قرار دهیم، داریم:

$$\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -\ln x < \frac{1}{x} - 1$$

$$\Rightarrow 1 - \ln x - \frac{1}{x} < 0$$

و از آنجا نتیجه بگیرید: که

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

نامساوی اول داریم $\ln x < x - 1$ و از نامساوی دوم داریم: $1 - \frac{1}{x} < \ln x$

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$$

پس:

9. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (بدون استفاده از قاعده هوییتال)

حل) طبق مسأله قبل اگر به جای x ، قرار دهیم $x+1$ ، داریم:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

پس

چون داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ ، طبق قضیه فشردگی،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

10. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (بدون استفاده از هوییتال)

حل) طبق تمرین 8 داریم:

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$$

دو طرف را بر x تقسیم می کنیم. $\frac{x-1}{x^2} < \frac{\ln x}{x} < \frac{x-1}{x}$ ، از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$$

طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

فصل هشتم

روش های

انتگرال گیری

تمرین صفحه 436 .

انتگرال $\int x^n \ln x \, dx$ را حل کنید.

(حل) اگر فرض کنیم $dv = x^n dx, u = \ln x$ داریم:

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c \quad \text{پس}$$

تمرین صفحه 436 .

یک فرمول بازگشتی برای $I_n = \int \cos^n x \, dx$ ($n > 1$) پیدا

کنید و به کمک آن $\int \cos^4 x \, dx$ را محاسبه کنید.

(حل) I_n را به صورت $I_n = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$ می نویسیم.

اگر فرض کنیم $dv = \cos x \, dx, u = \cos^{n-1} x$ داریم

$du = -(n-1) \cos^{n-2} x \cdot \sin x \, dx$ و $V = \sin x$ در نتیجه:

$$I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$\Rightarrow I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow n I_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$n=2 \rightarrow 2 I_2 = \sin x \cdot \cos x + x$$

$$n=4 \rightarrow 4 I_4 = \sin x \cdot \cos^3 x + 3 I_2$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{4} (\sin x \cdot \cos^3 x + \frac{3}{2} (\sin x \cdot \cos x + x))$$

تمرین صفحه ۴۳۹ .

(۱) هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

$$1) \quad \int e^x (f(x) + f'(x)) dx = f(x) \cdot e^x + c$$

$$2) \quad \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{x+1} + c$$

$$3) \quad \int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - \int \frac{x}{a^2 + x^2} dx \\ \Rightarrow x \ln(a^2 + x^2) - \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + c$$

$$4) \quad \int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int u e^u du = -\frac{1}{2} (-x^2 - 1) e^{-x^2} + c$$

$$5) \quad \int x^5 e^x dx = (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) e^x$$

$$6) \quad I = \int \sin(\ln x) dx$$

$$u = \sin(\ln x) \quad , dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) \quad , v = x$$

$$I = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$u = \cos(\ln x) \quad , dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) \quad , v = x$$

$$I = x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - I$$

$$I = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$$

$$7) \quad I = \int x \operatorname{tg}^{-1} x dx$$

$$u = \operatorname{tg}^{-1} x, dv = x dx \Rightarrow dv = \frac{1}{1+x^2} dx \quad , \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{tg}^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} x + c$$

$$8) \quad \int \sin^{-1} \sqrt{x} dx \quad t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$$

$$I = 2 \int t \sin^{-1} t dt = t^2 \sin^{-1} t - \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \int \frac{1-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= t^2 \sin^{-1} t + \sin^{-1} t + \int \sqrt{1-t^2} dt$$

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \int \cos^2 q dq = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cos 2q$$

$$\Rightarrow I = x \sin^{-1} \sqrt{x} + \sin^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{4} \cos 2(\cos^{-1} \sqrt{x})$$

فصل هفتم: توابع غیر جبری

°

$$9) \quad I = \int (x^3 + x) \operatorname{ch} x \, dx$$

$$I = (x^3 + x) \operatorname{sh} x - (3x^2 + 1) \operatorname{ch} x + 6x \operatorname{sh} x - 6 \operatorname{ch} x$$

$$10) \quad I = \int \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx$$

$$u = \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1 + x^2}), \, dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \, v = x$$

$$I = x \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = x \operatorname{Ln}(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c$$

$$11) \quad I = \int x \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

$$u = \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \, dv = dx \Rightarrow du = \frac{2}{1-x^2} dx, \, v = x$$

$$I = x \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \int \frac{2x}{1-x^2} dx = x \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \operatorname{Ln}(1-x^2) + c$$

$$12) \quad I = \int x^2 \operatorname{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

$$u = \operatorname{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \quad dv = x^2 dx \Rightarrow du = -\frac{2}{1-x^2} dx, \, v = \frac{x^3}{3} dx$$

$$I = \frac{x^3}{3} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{3} \int x^3 \frac{1-x^2}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{3} \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{Ln}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{6} \operatorname{Ln}(x^2-1) + c$$

$$13) \quad I = \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$u^2 = x \Rightarrow 2u du = dx$$

$$I = 2 \int u e^u du = 2(u-1)e^u + c = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + c$$

$$14) \quad I = \int \frac{tg^{-1} e^x}{e^x} dx$$

$$u = tg^{-1} e^x, \, dv = \frac{dx}{e^x} \Rightarrow du = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \, v = -\frac{1}{e^x}$$

$$I = -\frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + \int \frac{dx}{1+e^{2x}} = \frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + \int \frac{du}{u(1+u^2)}$$

$$= -\frac{tg^{-1} e^x}{e^x} + \operatorname{Ln} e^x + \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(1+e^{2x}) - 2tg^{-1} e^x + c$$

$$15) \quad I = \int (\sin^{-1} x)^2 dx$$

$$u = (\sin^{-1} x)^2, \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1} x dx, \quad v = x$$

$$\begin{aligned} I &= x(\sin^{-1} x)^2 - \int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \sin^{-1} x dx \\ &= x(\sin^{-1} x)^2 + 2(\sqrt{1-x^2}) \sin^{-1} x - 2x + c \end{aligned}$$

$$16) \quad I = \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

$$u = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2, \quad dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = 2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right) dx, \quad v = x$$

$$\begin{aligned} I &= x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2 \int \frac{\ln x - (\ln x)^2}{x^2} dx \\ &= x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx + 2 \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx \\ -I &= x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + 2 \int \frac{1-\ln x-1}{x^2} dx \\ I &= -x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2\left(\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx - \int \frac{1}{x^2} dx\right) + c \\ &= -x\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17) \quad I &= \int \frac{\ln(1+x)}{2(1+x)} dx = \frac{1}{2} \int u du \\ &= \frac{1}{4} (\ln(1+x))^2 + c \end{aligned}$$

$$18) \quad I = \int_0^{\frac{p^2}{2}} \cos \sqrt{2x} dx$$

$$u = \sqrt{2x} \quad \Rightarrow \quad 2u du = 2dx$$

$$I = \int_0^p u \cos u du = u \sin u + \cos u + c$$

$$19) \quad I = \int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{x} dx, \quad u = \sqrt{x}$$

$$2u du = dx$$

$$I = 2 \int_1^2 u \sec^{-1} u du = 2 \int_1^2 u \cos^{-1} \left(\frac{1}{u}\right) du$$

$$t = \cos^{-1} \left(\frac{1}{u}\right) \Rightarrow dt = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} du = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$$

$$I = 2\left(\frac{u^2}{2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right) - \int \frac{u}{\sqrt{u^2-1}} du$$

$$= u^2 \cos^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) - \sqrt{u^2-1} \Big|_1^2 = 4 \times \frac{p}{3} - \sqrt{3}$$

$$20) \quad I = \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x \cdot \cot x \cdot \csc x \, dx = - \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} x (\csc x)' \, dx$$

$$u = x, \quad dv = (\csc x)' \, dx \Rightarrow du = dx, \quad v = \csc x$$

$$I = x \csc x \Big|_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} - \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} \csc x \, dx$$

$$\int \csc x \, dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right|$$

$$I = \left(\frac{3p}{4} \times \sqrt{2} - \frac{p}{4} \times \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right| - \operatorname{Ln} \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right)$$

$$21) \quad I = \int_0^{\frac{p^2}{4}} \sin \sqrt{x} \, dx \quad u^2 = x \Rightarrow 2u \, du = dx$$

$$I = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} u \sin u \, du = 2(-u \cos u + \sin u) \Big|_0^{\frac{p}{2}}$$

تمرین صفحه ۴۴۴ .

هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید .

$$1) \quad \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx$$

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow (Ax + B)(x^4 + 2x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 1) + Ex + F \\ = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = -1, \quad 2A + C = 4 \Rightarrow C = 2 \\ 2B$$

$$2) \quad \int \frac{(\sec^2 x + 1) \cdot \sec^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx, \quad u^2 = \sec^2 x - 1$$

$$I = \int \frac{(u^2 + 2)du}{1 + u^3}$$

$$\frac{u^2 + 2}{1 + u^3} = \frac{A}{1 + u} + \frac{Bu + C}{1 + u + u^2}$$

$$\Rightarrow (A + B)u^2 + (A + B + C)u + A + C = u^2 + 2$$

$$A + B = 1$$

$$A + B + C = 0 \Rightarrow C = -1, \quad A = 3, \quad B = -2$$

$$A + C = 2$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{3}{u + 1} du - \int \frac{2u + 1}{u^2 + u + 1} du = 3 \ln(u + 1) - \ln(u^2 + u + 1) + c$$

$$I = 3 \ln(\tan x + 1) - \ln(\tan^2 x + \tan x + 1) + c$$

$$3) \quad I = \int \frac{x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1} dx$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{Bx + C}{9x^2 + 3x + 1}$$

$$\Rightarrow (9A + 3B)x^2 + (3A - B + 3C)x + A = x^2 + 2x - 1$$

$$\Rightarrow 9A + 3B = 1, \quad 3A - B + 3C = 2, \quad A - C = -1$$

$$A = C - 1, \quad 9C - 9 + 3B = 1$$

$$3C - 3 - B + 3C = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9C + 3B = 10 \\ 6C - B = 5 \end{cases} \Rightarrow 27C = 25 \Rightarrow C = \frac{25}{27}$$

$$A = \frac{-2}{27}, \quad B = \frac{75}{9} - \frac{45}{9} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{27} \int \frac{dx}{3x - 1} = -\frac{2}{81} \ln(3x - 1)$$

$$\frac{\frac{10}{3}x - \frac{25}{27}}{9x^2 + 3x + 1} = \frac{1}{27} \cdot \frac{90x - 25}{9x^2 + 3x + 1}$$

$$I = -\frac{2}{81} \ln(3x - 1) + \frac{1}{27} \int \frac{90x - 25}{9x^2 + 3x + 1} dx$$

$$4) \quad I = \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -1$$

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$5) \quad \int \frac{dq}{\cos q (1 + \sin q)}$$

$$u = \sin q \Rightarrow \frac{du}{\cos q} = dq$$

$$I = \int \frac{du}{(1-u)^2(1+u)} = \int \frac{du}{(1+u)^2(1-u)}$$

$$\frac{1}{(1+u)^2(1-u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u}$$

$$C = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad A = \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1+u)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{u-1}$$

$$I = \frac{1}{4} \ln(1 + \sin q) - \frac{1}{2(1 + \sin q)} - \frac{1}{4} \ln(\sin q - 1) + C$$

$$6) \quad \int \frac{dq}{\sin(1 + \sin q)} = \int \frac{dq}{\sin q} - \int \frac{dq}{1 + \sin q}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin q - 1}{\sin q + 1} \right| - \int \frac{1 - \sin q}{\cos^2 q} dq$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin q - 1}{\sin q + 1} \right| - \operatorname{tg} q = \frac{1}{\cos q} + C$$

$$\begin{aligned}
7) \quad & \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)^2} \\
& \frac{1}{(1+t)(1+t^2)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} + \frac{Dt+E}{(t^2+1)^2} \\
& A(t^2+1)^2 + (Bt+C)(t^2+1) + dt + E = 1 \\
& A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4} \\
& A + C + E = 1 \Rightarrow C + E = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8) \quad & \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx \\
& \frac{x^2+1}{x^3+8} = \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \\
& \Rightarrow (A+B)x^2 + (2A+2B+2C)x + 4A+2C = x^2+1 \\
& A+B=1 \\
& \Rightarrow C=-1, \quad A=\frac{3}{4}, \quad B=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$A+B+C=0$$

$$4A+2C=1$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{4} \int \frac{3x+1}{x^2+2x+4} dx \\
&= \frac{1}{4} \ln(x+2) + \frac{1}{4} \int \frac{2x+2+(x-1)}{x^2+2x+4} dx \\
&= \frac{1}{4} \ln(x+2) + \frac{1}{4} \ln(x^2+2x+4) + \frac{1}{4} \int \frac{(x-1)}{x^2+2x+4} \\
& \int \frac{(x-1)}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln((x+1)^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

- 9)
$$\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3} = \int \frac{dx}{x^3(x-3)}$$

$$\frac{dx}{x^3(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-3}$$

$$C = -\frac{1}{3}, \quad D = 1, \quad A = -1, \quad B = \frac{4}{3}$$

$$I = -\ln x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^2} + \ln(x-3) + C$$
- 10)
$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} = \int \frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$A = 2, \quad B = -4, \quad \dots$$
- 11)
$$\int \frac{x dx}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} = \frac{Cx + D}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$A = 1, \quad B + D = 0, \quad C = 0$$

$$3B + D = 2 \Rightarrow B = 1, \quad D = -1$$
- 12)
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$
- 13)
$$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}$$
- 14)
$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2}$$

تمرین صفحه 449.

هر یک از انتگرال های زیر را حل کنید.

$$1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1}(2x) + C$$

$$2) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$x = 3 \sin q \quad \Rightarrow \quad dx = 3 \cos q \, dq$$

$$I = \int \frac{9 \sin^2 q \cdot 3 \cos q \, dq}{3 \cos q} = \frac{9}{2} q - \frac{9}{4} \sin 2q$$

$$3) \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = 27 \int \sin^3 q \, dq = 27 \int \sin q - \cos^2 q \sin q$$

$$= -27 \cos q + 9 \cos^3 q + c$$

$$4) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dq}{\sin q} = -\frac{1}{6} \ln \left| \frac{\sin q + 1}{\sin q - 1} \right| + 2$$

$$5) \quad \int x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx$$

$$x = 3 \sin q \quad \Rightarrow \quad I = 81 \int \sin^2 q \cdot \cos^2 q \, dq$$

$$I = \frac{81}{4} \int \sin^2 2q \, dq = \frac{81}{8} q - \frac{81}{32} \sin 4q + C$$

$$6) \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = \int (\sin q + 1) \, dq = -\cos q + q$$

$$7) \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} \, dx \quad x = 3 \tan q \quad \Rightarrow \quad dx = 3 \sec^2 q \, dq$$

$$I = 27 \int \tan^3 q \, dq = 27 \int \tan q (\sec^2 q - 1) \, dq$$

$$= \frac{27}{2} \tan^2 q + 27 \ln(\cos q) + C$$

$$8) \quad I = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{\cos^2 q}{\sin^2 q} dq = -\cot q - q + C$$

$$9) \quad I = \int_{-\ln 2}^0 e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

$$u = e^x \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \cos^2 q dq$$

$$= \left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\sin 2q \right) \bigg|_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{4} - \left(\frac{p}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$

$$10) \quad \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 1)^2} = \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2}$$

$$\int \frac{\sec^2 q}{\sec^4 q} dq = \int \cos^2 q dq = \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}\sin 2q + C$$

$$11) \quad \int \frac{dx}{(1+2x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \sqrt{2}x = \tan q$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec^2 q}{\sec^5 q} dq = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \cos^3 q dq$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\cos q - \sin^2 q \cos q) dq = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin q - \frac{\sin^3 q}{3\sqrt{2}} + C$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad \int \frac{dq}{2 + \sin q} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dq}{1 + \sin q + \cos q} &= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t} \\
 &= \ln(1+t) \Big|_0^1 = \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad \int \frac{dq}{3 + 2\cos q} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt \\
 &= \int \frac{2dt}{t^2 + 5} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{5}} \right) + C
 \end{aligned}$$

$$15) \quad \int \sec^3 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2}$$

$$D = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad A + C = 0, \quad A - C = -\frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{4}$$

$$I = -\frac{1}{4} \ln|\sin x + 1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{4} \ln|\sin x - 1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin x - 1}$$

$$16) \quad \int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$17) \quad I = \int x \sin^{-1} x dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \sin^2 q dq$$

$$= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{4} (\sin^{-1} x) + \frac{1}{8} \sin 2(\sin^{-1} x) + C$$

$$18) \quad \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1-t}$$

$$= -\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + C$$

$$19) \quad \int_0^p \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx = - \int_1^{-1} \frac{du}{4 + u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} u \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} = \frac{p}{4}$$

$$20) \quad \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec q \cdot \operatorname{tg} q}{\sec^4 q \cdot \operatorname{tg} q} dq = \int \cos^3 q dq$$

$$= \int (1 - \sin^2 q) \cos q dq = \sin q - \frac{\sin^3 q}{3} + C$$

$$21) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + C$$

$$22) \quad \int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 13} = \int \frac{dx}{(2x+3)^2 + 4} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2x+3}{2} \right)$$

فصل نهم

مختصات قطبی و
منحنی‌های قطبی

تمرین صفحه 456

1. برای هر یک از نقاط زیر، دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان

نقطه را پیدا کنید که در یکی $r > 0$ و دیگری $r < 0$ باشد.

الف) $(\sqrt{2}, -\frac{p}{4}) : (-, \frac{3p}{4})$, $(\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

ب) $(-2, \frac{4p}{3}) : (2, \frac{7p}{3})$, $(-2, \frac{10p}{3})$

ج) $(-3, -p) : (3, 0)$, $(-3, p)$

2- مختصات قطبی نقاط زیر را با شرایط $r > 0$ و $0 \leq q \leq 2p$ تعیین

کنید

الف) $(2, 2) : (2\sqrt{2}, \frac{7p}{4})$

ب) $(-1, -\sqrt{3}) : (2, \frac{4p}{3})$

ج) $(1, \sqrt{3}) : (2, \frac{p}{3})$

3- معادله قطبی معادلات زیر را بنویسید.

الف) $x^3 = 4y^2 : r^3 \cos^3 q = 4r^2 \sin^2 q \Rightarrow r = \frac{4 \sin^2 q}{\cos^3 q}$

ب) $xy = 1 : r^2 \sin q \cos q = 1$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4x$$

$$\begin{aligned} \text{ج)} \quad & \Rightarrow r^2 = 4r \cos q \\ & \Rightarrow r = 4 \cos q \end{aligned}$$

4- معادلات دکارتی معادلات زیر را بنویسید.

$$\text{ف)} \quad r = 2 \sin 3q = 2(3 \sin q \cos^2 q - \sin^3 q)$$

$$r^4 = 6r \sin q (r \cos q)^2 - 2(r \sin q)^3$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 6yx^2 - 2y^2$$

$$\text{ب)} \quad \frac{4}{3 - 2 \cos q} \Rightarrow 3r - 2 \cos q = 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2} - 2x = 4 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) = (2x + 4)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 = 4x^2 + 16x + 16$$

$$\text{ج)} \quad \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = q \Leftrightarrow y = x \tan q$$

$$\Rightarrow y = x \tan q (x^2 + y^2)$$

تمرین صفحه 462

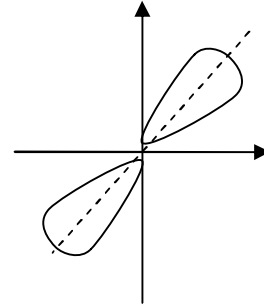
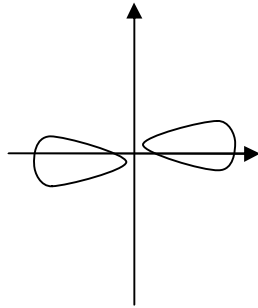
1. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

$$1) \quad r^2 = 9 \sin 2q$$

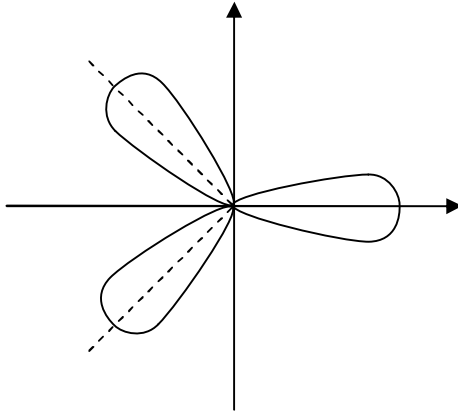
$$2) \quad r^2 = 16 \cos 2q$$

حل المسائل رياضي عمومي (١)

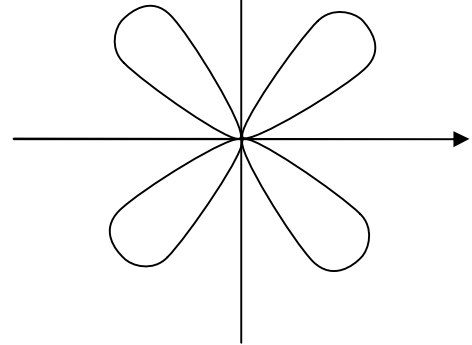
٤



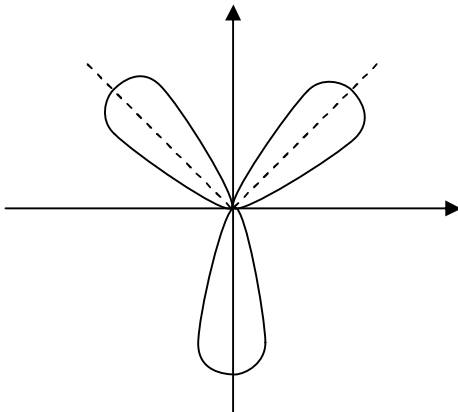
3) $r = 3 \cos 3q$



4) $r = 4 \sin 2q$



5) $r = 3 \sin 3q$



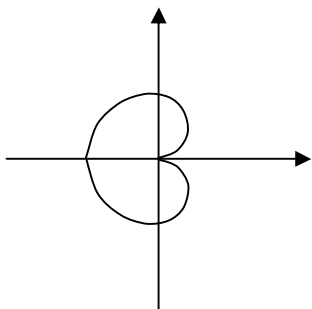
6) $r = 1 + 2 \sin q$

$r = 2(\frac{1}{2} + \sin q)$

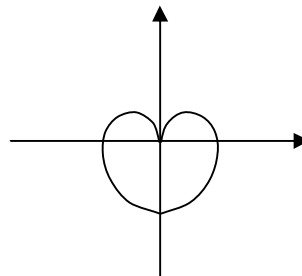
فصل دوم: حد و پیوستگی

۵

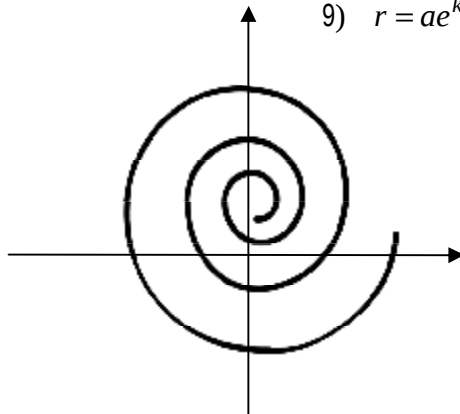
7) $r = 4(1 - \cos q)$



8) $r = 3(1 - \sin q)$



9) $r = ae^{kq}$



2. فرض کنید خطی از مبدأ بر خط $dx + by - c = 0$ عمود باشد.

مختصات تقاطع آنها را در مختصات قطبی تعیین کنید.

$$y = x - \frac{d}{b}x + \frac{c}{b}$$

خط مورد نظر به صورت $y = \frac{d}{b}x$ است. که در مختصات قطبی به

صورت $q = \text{tg}^{-1}(\frac{d}{b})$ مطرح می شود.

$$r \sin q = -\frac{d}{b}r \cos q + \frac{c}{b}$$

$$r = \frac{c}{b \sin q + d \cos q} = \frac{c}{b \sin(\text{tg}^{-1}(\frac{b}{d})) + d \cos(\text{tg}^{-1}(\frac{b}{d}))}$$

$$r = \frac{c}{\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + d^2}} + \frac{d^2}{\sqrt{b^2 + d^2}}}$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{b^2 + d^2}}$$

3. مسأله 2 را در مورد خط $\sqrt{3}x + y = 6$ حل کنید.

$$q = \text{tg}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{p}{6}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

4. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $r = 2\sin q$

$$r = 2\sin q \Rightarrow r^2 = 2r \sin q \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$

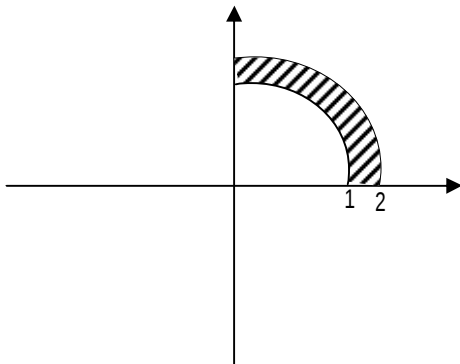
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ب) $r = 2\sin(q + 45^\circ)$

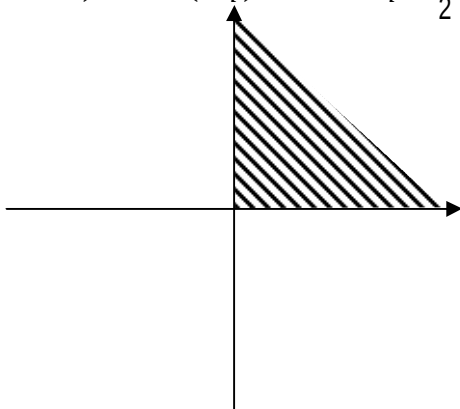
کافی است نمودار قبلی را به اندازه 45° در جهت ساعت دوران دهیم.

5. ناحیه های زیر را در مختصات قطبی نمایش دهید.

الف) $D = \{(r, q) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}\}$



ب) $R = \{(r, q) | r \geq 0, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}\}$

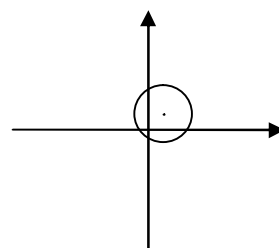


$$ج) \quad P = \{(r, q) \mid 0 \leq r \leq 2 \cos q, -\frac{p}{2} \leq q \leq \frac{p}{2}\}$$

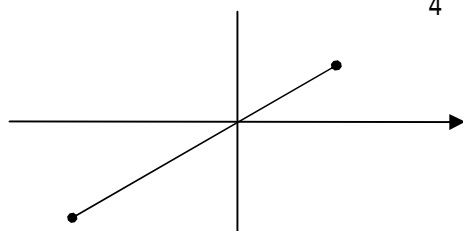
$$0 \leq r \leq 2 \cos q \Rightarrow 0 \leq r^2 \leq 2r \cos q$$

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$$

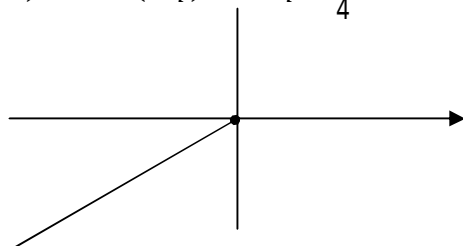
$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$



$$د) \quad T = \{(r, q) \mid -3 \leq r \leq 2, q = \frac{p}{4}\}$$



$$هـ) \quad K = \{(r, q) \mid r \leq 0, q = \frac{p}{4}\}$$



تمرین صفحه 446

1. نقاط تقاطع نمودارهای داده شده را پیدا کنید.

الف) $r = 1 - \sin q$, $r = \cos(2q)$

$$\begin{aligned} q = \frac{p}{4} &\Rightarrow r = \cos\left(2 \times \frac{p}{4}\right) = 0 \\ q = \frac{p}{2} &\Rightarrow r = 1 - \sin \frac{p}{2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

دو منحنی از قطب می گذرند.

$$\begin{aligned} \cos(2q) = 1 - \sin q &\Rightarrow 1 - 2\sin^2 q = 1 - \sin q \Rightarrow 2\sin^2 q = \sin q \\ \Rightarrow q = 0, p, q = \frac{p}{6}, \frac{5p}{6} \end{aligned}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۰

$$r = 2\cos q, r = 2\sin q \quad (\text{ب})$$

$$q = 0 \rightarrow r = 2\sin 0 = 0$$

$$q = \frac{p}{4} \rightarrow r = 2\cos \frac{p}{2} = 0 \quad " \quad \text{قطب روی دو منحنی است}$$

$$\cos 2q = \sin q = \cos(q - \frac{p}{2}) \Rightarrow 2q = 2Kp \pm (q - \frac{p}{2})$$

$$\Rightarrow q = 2Kp - \frac{p}{2} \Rightarrow q = -\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}$$

$$q = \frac{2kp}{3} + \frac{p}{2} \Rightarrow q = \frac{p}{2}, \frac{2p}{3} + \frac{p}{2}$$

$$r = 1, r^2 = 2\cos q \quad (\text{ج})$$

$r = 1$ از قطب نمی گذرد.

$$1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$-1 = 2\cos q \Rightarrow \cos q = -\frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}$$

$$r(1 - \sin q) = 3, r = 4(1 + \sin q) \quad (\text{د})$$

$$q = -\frac{p}{2} \Rightarrow r = 4(1 + \sin(-\frac{p}{2})) = 0$$

منحنی دوم از قطب نمی گذرد.

$$\frac{3}{1-\sin q} = 4(1+\sin q) \Rightarrow \cos^2 q = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos q = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$q = \pm \frac{p}{6}, \frac{5p}{6}, \frac{7p}{6}$$

2. نمودار $r = \sin \frac{3}{2}q$ ، خودش را قطع می کند. نقاط تقاطع را تعیین کنید.

تمرین صفحه 469

1. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 1 + \sin q$ را در نقطه

$(\frac{p}{3}$ و $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$) بدست آورید.

(حل)

$$\frac{dr}{dq} = \cos q, \quad \operatorname{tg} \frac{p}{3} = \sqrt{3}$$

$$m = \operatorname{tg} d = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\sqrt{3}}$$

$$m = \frac{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - \frac{3}{2}}$$

2. زاویه بین شعاع حامل و خط مماس بر منحنی های زیر را در نقاط

مفروض بدست آورید.

$$p(\sqrt{2}, \frac{p}{6}), r^2 = 4 \cos 2q \quad (\text{الف})$$

$$tgb = \frac{\frac{r}{dr}}{\frac{jq}{dq}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{-\sin 2q}}{\frac{\sqrt{4 \cos 2q}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{-\frac{2}{\sqrt{2}}}} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \quad (\text{حل})$$

$$p(3, p), r = 3(1 - \sin q) \quad (\text{ب})$$

$$tgb = \frac{\frac{r}{dr}}{\frac{dq}{dq}} = \frac{3}{-\cos q} = 1 \Rightarrow b = \frac{p}{4}$$

3. مطلوب است اندازه زاویه کوچکترین خطهای مماس بر نقطه تقاطع

داده شده در منحنی

$$p(-2, \frac{2p}{3}), r = 4 \cos^2 q - 3, r = 4 \cos q$$

$$m_1 = tgd_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{2-2}{-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{3})} = 0$$

$$\begin{aligned}
 m_2 = \operatorname{tg} d_2 &= \frac{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2}{-8 \sin \frac{2p}{3} \cos \frac{2p}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \\
 &= \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 2}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}} =
 \end{aligned}$$

4. دلنمای $r = 2(1 - \cos q)$ مفروض است. ثابت کنید $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \frac{q}{2}$

(حل)

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dq} = 2 \sin q \Rightarrow \operatorname{tg} b &= \frac{r}{\frac{dr}{dq}} = \frac{1 - \cos q}{\sin q} \\
 \Rightarrow \operatorname{tg} b &= \frac{2 \sin^2 \frac{q}{2}}{2 \cos \frac{q}{2} \sin \frac{q}{2}} = \frac{\sin \frac{q}{2}}{\cos \frac{q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{q}{2}
 \end{aligned}$$

5. ثابت کنید. به ازای هر a, b ، خطوط مماس در هر یک از نقاط تقاطع

دلنمای زیر متعامدند.

حل المسائل رياضي عمومي (١)

١٤

$$r = a(1 + \sin q) , r = b(1 - \sin q)$$

فصل دهم

کاربردهای انتگرال

10-1-5 تمرین صفحه 476

1. سطح محصور به نمودار توابع $x = y^2$, $x = 2y^2 - y - 2$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$y^2 = 2y^2 - y - 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 2$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^2 (y^2 - y - 2) dy \right| = \left| \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right| = \left| \frac{-10}{3} - \frac{7}{6} \right| \\ &= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2. سطح محصور به نمودار توابع $x - y = v$, $2y^2 - y + 3 - x = 0$ را

محاسبه کنید

(حل)

$$x = v + y, \quad x = 2y^2 - y + 3$$

$$v + y = 2y^2 - y + 3 \Rightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 2$$

$$s = \left| \int_{-1}^2 (2y^2 - 2y - 4) dy \right| = \left| \left(\frac{2}{3} y^3 - y^2 - 4y \right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{16}{3} - 12 \right) - \left(\frac{-2}{3} - 1 - 4 \right) \right| = |6 - 12 + 5| = 1$$

3. سطح محصور به نمودار توابع $y = \sin x$, $y = \cos x$ را در فاصله

$0 \leq x \leq 2p$ محاسبه کنید.

$$s = \left| \int_0^{\frac{p}{4}} (\cos x - \sin x) dx \right| + \left| \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$+ \left| \int_{\frac{3p}{4}}^{2p} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$s = 3$$

4. سطح محصور به نمودار توابع $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$x^2 - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

$$s = \left| \int_{-1}^1 (4 - 2x^2 + 2x) dx \right| = \left(4x - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right)$$

$$= 8 - \frac{16}{3} + 4 + 4 - \frac{2}{3} - 1 = 15 - \frac{16}{3} = \frac{29}{3}$$

5. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به خطوط $x=2$, $x=0$ و

$$y=2x, y=2x-x^2 \quad \text{منحنی های}$$

$$s = \left| \int_0^2 (2x - x^2 - 2x) dx \right| = \left| -\frac{x^3}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

6. سطح محصور به نمودار توابع $x=2y^2$, $x=1-3y^2$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$2y^2 = 1 - 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$s = \int_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} (1 - 3y^2 - 2y^2) dy$$

$$= 2 \left(y - y^3 - \frac{2}{3} y^3 \right) \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{15\sqrt{5}} \right)$$

7. مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ ، $x^2 = 4y$

(حل)

$$\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2 + 4} \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$s = \int_{-2}^2 \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{8}{x^2 + 4} \right) dx = 2 \int_0^2 \frac{8}{x^2 + 4} dx - 2 \int_0^2 \frac{x^2}{4} dx$$

$$= 8 \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \bigg|_0^2 - \frac{x^3}{6} \bigg|_0^2 = 2\pi - \frac{4}{3}$$

8. مساحت قسمتی از ربع اول را که داخل دایره $x^2 + y^2 = 3$ و محدود به

سهمی های $y = 2x$ ، $x^2 = 2y$ می باشد، حساب کنید.

۲۰ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

(حل) این مساحت با انتگرال دوگانه در ریاضی ۲ حل می شود.

9. مساحت ناحیه ای را حساب کنید که به خطوط $y = x + 1$, $y = \cos x$ و

محور x ها محدود است.

(حل) صورت سؤال اشتباه است.

10. مطلوب است محاسبه مساحت بین منحنی $x = 2$, $y = x^3 - x^2$

(حل)

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$s = 2 \int_0^2 \sqrt{x^3 - x^2} dx = 2 \int_0^2 x \sqrt{1 - x} dx$$

$$1 - x = u^2 \Rightarrow dx = -2u du$$

$$s = -4 \int u^2 (1 - u^2) du = -4 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1$$

$$= 8 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15}$$

11. مساحت بین منحنی های $y = (x - 4)^2$, $y = 16 - x^2$ و محور x ها را

تعیین کنید.

(حل)

$$16 - x^2 = (x - 4)^2$$

$$16 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$s = \int_0^4 (16 - x^2 - (x - 4)^2) dx = 16x - \frac{x^3}{3} - \frac{(x - 4)^3}{3} \Big|_0^4$$

$$= (64 - \frac{64}{3}) + \frac{64}{3} = 64$$

12. مطلوب است مساحت محدود به منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 3$ و محور x ها که

بین عرض های نقاط می نیمم $y(x)$ واقع است.

(حل)

$$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2x = x(x - 1)(4x - 2)$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$$

$$y = 3, y = 3, y = \frac{49}{16}$$

13. مساحت محدود به نمودار تابع $x = 2(y - 1)^2$, $x = 1$, $(y - 1)^2 = x - 1$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$x = 2(x-1) \Rightarrow X = 2$$

$$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0, y = 2$$

$$s = \int_0^2 (1 + (y-1)^2 - 2(y-1)^2) dy = \int_0^2 (1 - (y-1)^2) dy$$

$$= \left(y - \frac{(y-1)^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

14. سطح محصور به نمودار $y = chx$ و خط $x=1$ و محور x ها را حساب

کنید

(حل) مساحتی وجود ندارد.

15. مساحت های دو ناحیه ای را که سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2 + y^2 = 8$

تقسیم می کند محاسبه کنید.

(حل)

$$y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 8)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

مساحت نیم دایره بالایی برابر نصف $8p = p(2\sqrt{2})^2$ است یعنی $4p$ است.

16. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند

$(0 < a < 1)$ مساحت ناحیه ای را بیابید که محدود به دو قرص است.

(حل) دایره های $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x+1)^2 + y^2 = 1$ را در نظر می گیریم خط

$x=1-a$ وتر مشترک دودایره است. به علت تقارن مساحت بین

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ و خط را محاسبه و دو برابر می کنیم

$$\begin{aligned} x=1-a &\Rightarrow (1-a-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1-a^2} \\ s &= 2 \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} (1-a - (1-\sqrt{1-y^2})) dy \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{1-a^2}} (\sqrt{1-y^2} - a) dy = 4 \left(\int_0^{\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}} \cos^2 q dq - \int_0^{\sqrt{1-a^2}} a dv \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin^{-1}(\sqrt{1-a^2}) + \frac{1}{4} \sin 2(\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}) - a\sqrt{1-a^2} \right) \end{aligned}$$

(18) اگر $f(x) = ax$, $g(x) = x^3$ ($a > 0$) ثابت) انگاه مساحت محصور به دو

منحنی را حساب کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 ax = x^3 &\Rightarrow x = 0, x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a} \\
 s &= \left| \int_{-\sqrt{a}}^0 (ax - x^3) dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| \\
 &= 2 \left| \int_0^{\sqrt{a}} (x^3 - ax) dx \right| = 2 \left| \left(\frac{x^4}{4} - a \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^{\sqrt{a}} \\
 &= 2 \left| \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) \right| = \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

19) مساحت محصور به نمودار $x^2y + 4y - 12 = 0$ و محور مختصات و

خط $x=2$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 y(x^2 + 4) &= 12 \Rightarrow y = \frac{12}{4 + x^2} \\
 s &= \int_0^2 \frac{12}{4 + x^2} dx = 6 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_0^2 = 6 \frac{p}{4} = \frac{3p}{2}
 \end{aligned}$$

20. مساحت محصور به نمودار توابع $x = y^3$, $y = x^3$, $x + y = 2$ را

محاسبه کنید.

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dy \\
 s_2 &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt[3]{y}) dx \\
 s_1 = s_2 &= \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه 480

مساحت سطح محصور را بیابید.

1.

$$-1 \leq t \leq 1, \quad c: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

$$g(t) = t^3 - t \Rightarrow g(-1) = -2, g(1) = 0$$

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

$$\begin{aligned} s &= \int_{-2}^0 (t^3 - t)(2t) dt = \left. \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 \right|_{-2}^0 \\ &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} = \frac{192 - 160}{15} = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 2, \quad c: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

$$x^4 + y^2 = x^2$$

شکل کاملاً متقارن است. "

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \int_0^{\frac{p}{4}} \cos t (\cos^3 t - 2 \sin^2 t \cos t) dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt - 8 \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 \int_0^{\frac{p}{2}} \cos^4 t dt &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt \\
 &= \frac{1}{4} \left(t + \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{p}{2} + \frac{p}{4} \right) = \frac{3p}{16}
 \end{aligned}$$

(3) مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را محاسبه کنید.

حل) بیضی را به صورت زیر پارامتری می کنیم:

$$\begin{aligned}
 x &= a \cos t \\
 y &= b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s &= 4 \left| \int_0^{\frac{p}{2}} -b \sin t (a \sin t) dt \right| = \left| -2ab \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 2t) dt \right| \\
 &= 2ab \times \frac{p}{2} = pab
 \end{aligned}$$

(4) مساحت محدود به $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را محاسبه کنید.

5. مساحت محدود به یک قوس سیکلوئید زیر را بدست آورید.

c:
$$\begin{aligned}
 x &= a(t - \sin t) \\
 y &= a(1 - \cos t)
 \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{\frac{p}{2}} a(1 - \cos t)^2 dt = a \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{3p}{4} - 2$$

تمرین صفحه 483

1. مساحت ناحیه ای از صفحه را که بین اولین و دومین دور از پیچ ارشمیدس

$r = aq$ واقع است. ($a > 0$) پیدا کنید.

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{4p} (aq^2) dq = \frac{1}{2} \frac{a}{3} q^3 \Big|_0^{4p} = \frac{16}{2} \frac{4}{3} ap^3$$

2. مطلوب است سطح محدود به $r = \sin 2q$

(حل) به علت تقارن کامل داریم:

$$s = \frac{1}{2} \times 4 \int_0^{\frac{p}{2}} (\sin 2q)^2 dq = \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - \cos 4q) dq = \frac{p}{2}$$

3. مساحت داخل دایره $r = 3 \cos q$ و خارج دلتمای $r = 1 + \cos q$ را بیابید

(حل)

$$3\cos q = 1 + \cos q \Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{p}{3}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{p}{3}}^{\frac{p}{3}} ((3\cos q)^2 - (1 + \cos q)^2) dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{3}} (2\cos^2 q - 2\cos q - 1) dq = \left(q + \frac{1}{2} \sin 2q - 2\sin q - q \right) \Big|_0^{\frac{p}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \Rightarrow s = \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \end{aligned}$$

4. مساحت محصور به $r = e^{2q}$ و خطوط $q = 0$, $q = 2p$.

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{2p} e^{4q} dq = \frac{1}{8} e^{2p} \Big|_0^{2p} = \frac{1}{8} (e^{4p} - 1)$$

5. مطلوب است مساحت داخل دایره $r = 1$ و خارج دایره $r = 1 - \cos q$.

(حل) دو نمودار همدیگر را در $q = \frac{p}{2}$, $q = \frac{3p}{2}$ قطع می کنند.

به علت تقارن، مساحت در فاصله $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$ را حساب کرده، دو برابر می کنیم.

$$\begin{aligned} s &= 2 \times \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} (1 - (1 - \cos q)^2) dq \\ &= \int_0^{\frac{p}{2}} (2\cos q - \cos^2 q) dq = \left(2\sin q - \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}\sin 2q \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2 - \frac{p}{4} \end{aligned}$$

6. مطلوب است مساحت ناحیه مشترک به دو منحنی $r = \sin 2q$, $r = \cos 2q$.

(حل) به علت تقارن، مساحت را در ربع اول حساب کرده، چهار برابر می کنیم.

7. مساحت ناحیه بین $r = 6 \cos q$, $r = 6 \sin q$ را حساب کنید.

$$\begin{aligned} S &= \left| 2 \int_0^{\frac{p}{4}} (6 \sin q)^2 dq \right| \\ &= \left| 6 \int_0^{\frac{p}{4}} (1 - \cos 2q) dq \right| \\ &= \left| 6(q - 2 \sin 2q) \int_0^{\frac{p}{4}} \right| \\ &= 6\left(\frac{p}{4} - 2\right) \end{aligned}$$

8. مساحت ناحیه داخل $r^2 = a^2 \cos 2q$ را بدست آورید.

(حل)

$$S = 4 \int_0^{\frac{p}{4}} a^2 \cos 2q = 4a^2 \sin 2q \Big|_0^{\frac{p}{4}} = 4a^2$$

9. مساحت ناحیه $r = 1 + \sin q$ را محاسبه کنید.

حل طبق مثال 3-3-10 برابر $\frac{3}{2}p$ است.

10. مساحت محدود به درون $r^2 = \sin 2q$ و دایره $r = \sqrt{2} \sin q$ را محاسبه

کنید.

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{p}{2}} 2 \sin^2 q - \sin 2q \, dq \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} q - \frac{1}{4} \sin 2q + \frac{1}{2} \cos 2q \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{p}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{4} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه 489.

1. طول منحنی $r = a \sin^3 \frac{q}{3}$ را در فاصله $0 \leq q \leq p$ محاسبه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^p \sqrt{(dr)^2 + r^2 (dq)^2} = \int_0^p \sqrt{a^2 \sin^4 \frac{q}{3} \cos^2 \frac{q}{3} + a^2 \sin^6 \frac{q}{3}} \, dq \\
 &= \int_0^p a \sin^2 \frac{q}{3} \, dq = \frac{a}{2} \int_0^p (1 - \cos^2 \frac{q}{3}) \, dq \\
 &= \frac{a}{2} \left(q - \frac{3}{2} \sin \frac{2q}{3} \right) \Big|_0^p = \frac{a}{2} \left(p - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)
 \end{aligned}$$

2. مطلوب است طول قوس $r = 2a \cos^2 q$ را در فاصله $0 \leq q \leq \frac{p}{4}$ بیابید.

(حل)

$$\frac{d}{dq} = -2a \sin 2q$$

$$s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sqrt{4a^2 \sin^2 2q + 4a^2 \cos^4 q} dq = 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{4 \sin^2 q + \cos^2 q} dq$$

$$= 2a \int_0^{\frac{p}{4}} \cos q \sqrt{3 \sin^2 q + 1} dq = 2a \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+3u^2} du$$

$$\sqrt{3}u = \tan t = \int \sqrt{1+3u^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sec^3 q dq$$

3. طول دلوار $r = a(1 - \cos q)$ را بیابید.

$$\frac{dr}{dq} = a \sin q \Rightarrow \left(\frac{dr}{dq}\right)^2 + r^2 = a^2 \sin^2 q + a^2 \cos^2 q + a^2$$

(حل)

$$s = 2 \int_0^p \sqrt{2a^2} dq = 2\sqrt{2}ap$$

4. طول منحنی های زیر را در بازه داده شده محاسبه کنید.

الف) $0 \leq t \leq 2p$, $y = \sin 2t$, $x = \cos 2t$

(حل)

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t} dt = 2p$$

ب) $0 \leq q \leq 2p$, $y = a \sin^3 q$, $x = a \cos^3 q$

(حل)

$$\frac{dx}{dq} = -3a \cos^2 q \sin q, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 q \cos q$$

$$s = 4 \int_0^{\frac{p}{2}} 3a \sin q \cos q dq = 12a \left. \frac{\sin^2 q}{2} \right|_0^{\frac{p}{2}} = 6a$$

5. طول قسمتی از منحنی $y^2 = x^3$ را که بین نقاط $(0, 0)$ و $(4, 8)$ واقع است،

محاسبه کنید.

$$y^2 = x^3 \Rightarrow 2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9x^4}{4y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{2}{3} \times \frac{4}{9} (1 + \frac{9}{4}x) \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

6. طول منحنی $y = \ln|\cos x|$ را در فاصله $0 \leq x \leq \frac{p}{4}$ محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = -\tan x \Rightarrow s = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec x dx$$

$$\Rightarrow s = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{p}{4}} = \ln |\sqrt{2} + 1|$$

7. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{2}x^2$ از نقطه $A(0, 0)$ تا نقطه $B(1, \frac{1}{2})$ را محاسبه

کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 y' = x &\Rightarrow s = \int_0^{-1} \sqrt{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{p}{4}} \sec^3 q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \int \sec^2 q \cdot \sec q dq = tgq \cdot \sec q - \int tg^2 q \cdot \sec q dq \\
 &= tgq \cdot \sec q - \int \sec^3 q dq + \int \sec q dq \\
 \int \sec^3 q dq &= \frac{1}{2} tgq \cdot \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + tgq| \\
 s &= \left(\frac{1}{2} tgq \sec q + \frac{1}{2} \ln |\sec q + tgq| \right) \Big|_0^{\frac{p}{4}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} \right)
 \end{aligned}$$

8. طول قوس منحنی $y^3 = 8x^2$ از نقطه $(1, 2)$ تا نقطه $(27, 18)$ را به دست

آورید.

(حل)

$$3y^2 y' = 16x \Rightarrow y' = \frac{16x}{3y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{16x} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{9y^4}{(16)^2 x^2} = \frac{9 \times 8y}{(16)^2}$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{9}{32}y$$

$$\begin{aligned} s &= \int_2^{18} \sqrt{1 + \frac{9}{32}y} dy = \frac{2}{3} \times \frac{32}{9} \left(1 + \frac{9}{32}y\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^{18} \\ &= \frac{64}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{32} \times 18\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{32} \times 2\right)^{\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}$$

9. طول قوس منحنی $6xy = y^4 + 3$ را در فاصله $1 \leq y \leq 2$ به دست آورید.

$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$$

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right)^2$$

$$s = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2}\right) dy = \left(\frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{1}{4}$$

10. طول قوس قسمتی از منحنی $9y^2 = 4(1+x^2)^3$ که در ربع اول از $x=0$ تا

$x=2\sqrt{2}$ واقع است تعیین کنید.

$$18yy' = 24x(1+x^2)^2 \Rightarrow y' = \frac{4x(1+x^2)^2}{3y}$$

$$(y')^2 = \frac{16x^2(1+x^2)^4}{9y^2} = 4x^2(1+x^2)^2$$

$$s = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2(1+x^2)^2} dx$$

11. طول قوس منحنی مقابل را

بیابید: $\therefore$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

$$s = \int_0^4 \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t \Big|_0^4 = \sqrt{2}(e^4 - 1)$$

$$C: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 4$$

(حل)

12. طول قوس منحنی C را به دست آورید:

$$C: \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = tg^{-1} t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

(حل)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^1$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$

13. طول قوس $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \leq x \leq 3$ محاسبه کنید.

(حل)

$$y' = x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + x^2(x^2 + 2)$$

$$s = \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx = \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^3 = 12$$

14. طول قوس $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ را در فاصله $2 \leq x \leq 3$ تعیین کنید.

(حل)

$$y = \ln(e^x - 1) \ln(e^x + 1)$$

$$y' = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} - 1)^2}$$

$$s = \int_2^3 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx = \int_2^3 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \ln(e^x - e^{-x}) \Big|_2^3$$

$$= \ln \frac{e^3 - e^{-3}}{e^2 - e^{-2}}$$

15. طول قوس منحنی $y = \frac{1}{3}t^2 + t$, $x = \frac{1}{3}(2t+3)^{\frac{3}{2}}$ را در فاصله $0 \leq t \leq 3$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (2t+3)^{\frac{1}{2}}, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}t \\ s &= \int_0^3 \sqrt{(2t+3)^2 + \frac{4}{9}t^2} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 \sqrt{(2t+9)^2 - 78} dt \end{aligned} \quad (\text{حل})$$

16. طول منحنی $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ را در فاصله $1 \leq x \leq 10$ حساب کنید.

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - \frac{1}{16x^3} = \frac{64x^6 - 1}{16x^3} \\ 1 + (y')^2 &= \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right)^2 \\ s &= \int_1^{10} \left(4x^3 + \frac{1}{16x^3}\right) dx = x^4 - \frac{1}{32x^2} \Big|_1^{10} \\ &= \left(10^4 - \frac{1}{3200}\right) - \left(1 - \frac{1}{32}\right) \end{aligned}$$

تمرین صفحه 495.

1. حجم حادث از دوران ناحیه OBC حول خط BC را پیدا کنید.

(حل)

$$V = p \int_0^4 (y-8)^2 dx = p \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 8)^2 dx$$

$$= p \int_0^4 (x^3 - 16x^{\frac{3}{2}} + 64) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} + 64x \right) \Big|_0^4$$

2. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = 4x$ و خط $y = x$

حول خط $x = 4$ را بیابید.

3. حجم مخروط مستدیری به شعاع قاعده a و ارتفاع h را تعیین کنید.

(حل)

$$y = \frac{a}{h} x$$

$$V = p \int_0^h \frac{a^2}{h^2} x^2 dx = \frac{1}{3} p a^2 h$$

5. مطلوب است حجم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = x$ و محور

y ها و خط $y = 1$ ، حول خط $y = 2$.

(حل)

$$V = \int_0^1 ((2 - \sqrt{x})^2 - (2 - 1)^2) dx$$

$$= p \int_0^1 (3 - 4\sqrt{x} + x) dx = p \left(3x - \frac{8}{3} x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = p \left(3 - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right)$$

حجم حادث از دوران ناحیه محدود به $x=2y-y^2$ حول محور y ها را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} V &= p \int_0^2 (2y - y^2)^2 dy = p \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) dy \\ &= p \left(\frac{4}{3} y^3 - y^4 + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = p \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) \end{aligned}$$

7. ناحیه A محصور به منحنی $y=x^2$ و $y=1$ ، $y=4$ ، $x=0$ حول محور

x ها دورانه می کند. حجم جسم حادث چقدر است؟

$$\begin{aligned} V &= 2p \int_{-2}^2 (4^2 - x^4) dx - p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ V &= 2p \int_0^2 (16 - x^4) dx - 2p \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx \\ &= 2p \left(16x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 - 2p \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \\ \Rightarrow V &= 2p \left(32 - \frac{32}{5} \right) - 2p \left(1 - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

8. منحنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را حول محور x ها دوران می دهیم، حجم حاصل

چقدر است.

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\begin{aligned} V &= p \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2pb^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= 2pb^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3} p b^2 a \end{aligned}$$

حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی های $y^2 = 8x$, $y = x^2$ حول محور x ها را حساب کنید.

$$x^4 = 8x \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$\begin{aligned} V &= p \int_0^2 (8x - x^4) dx = p \left(4x^2 - \frac{x^5}{5}\right) \Bigg|_0^2 \\ &= p \left(8 - \frac{32}{5}\right) \end{aligned}$$

10. ناحیه واقع بین محورهای مختصات و سهمی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ را حول

محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

(حل)

فصل دوم: حد و پیوستگی ۴۱

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \Rightarrow y = a + x - 2\sqrt{ax}$$

$$y^2 = (a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax$$

$$V = p \int_0^a ((a+x)^2 - 4(a+x)\sqrt{ax} + 4ax) dx$$

$$\Rightarrow V = \left(\frac{(a+x)^3}{3} - \frac{8}{3} ax\sqrt{ax} - \frac{4}{a^2} \times \frac{2}{5} (ax)^{\frac{5}{2}} + 2ax^2 \right) \Big|_0^a$$

$$= p \left(\frac{8a^3}{3} - \frac{8}{3} a^3 - \frac{8}{5} a^3 + 2a^3 \right) = \frac{8}{15} a^3 p$$

11. ناحیه بین یک قوس از منحنی $y = \sin x$ و محور عرض ها و خط

$y=1$ را حول محور y ها دوران می دهیم حجم حاصل را محاسبه کنید.

$$V = 2p \int_0^{\frac{p}{2}} x(1 - \sin x) dx = 2p \left(\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = 2p \left(\frac{p^2}{8} - 1 \right)$$

12. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به سهمی $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ و خط

$$5x - 8y + 14 = 0 \text{ حول محور } x \text{ ها را به دست آورید.}$$

(حل)

$$8y = 2x^2 + 4 \Rightarrow 5x + 14 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{105}}{4}, x = \frac{5 - \sqrt{105}}{2}$$

$$V = p \int_{\frac{5 - \sqrt{105}}{2}}^{\frac{5 + \sqrt{105}}{2}} \left(\frac{1}{4}x^2 + 2 \right)^2 - \left(\frac{5x + 14}{8} \right)^2 dx$$

تمرین صفحه 498 .

1. در یک جسم کروی شکل به شعاع 5 سانتی متر، حفره ای به شعاع 2 سانتی متر ایجاد می کنیم محور حفره یک قطر کرده است. حجم قسمت باقیمانده جسم را بدست آورید.

$$V = \frac{4}{3}p(125) - \frac{4}{3}p = \frac{4}{3}p(125 - 8)$$

$$= \frac{4}{3}p(117)$$

2. مطلوب است حجم جسم حادث از دوران ناحیه OBC محصور به $y = x^2$ و $y = x^3$

محور x ها و خطوط $y = 0$, $y = 8$ ، حول محور x ها .

$$V = p \int_0^4 (64 - x^3) dx = p \left(64x - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^4$$

$$V = p(256 - 64) = 192p$$

3. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه OAC محصور به منحنی $y^2 = x^3$

و خط $x = 4$ و محور x ها حول خط ac .

$$V = p \int_0^4 ((8 - x^{\frac{3}{2}})^2 - 64) dx$$

$$V = p \int_0^4 ((16 - x^{\frac{3}{2}} + x^3) dx$$

$$V = p \left(\frac{x^4}{4} - \frac{32}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^4 = \left| p \left(64 - \frac{(32)^2}{5} \right) \right|$$

4. مطلوب است حجم حادث از دوران ناحیه محصور به منحنی های

$$y = x^2, y = x^2, x = -2$$

(حل)

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$$

$$V = p \int_0^1 (\sqrt{y} + 2)^2 - (y^2 + 2)^2 dy$$

$$V = p \int_0^1 (y + 2\sqrt{y} + 4) - (y^4 + 4y^2 - 4) dy$$

$$V = p \left(\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y\sqrt{y} - \frac{y^5}{5} + \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$V = p \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3} \right) = p \left(\frac{15 + 80 - 6}{30} \right) = \frac{89}{30}$$

5. ناحیه ای که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود و در ربع اول است، حول محور y ها دوران می کند حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

$$V = 2p \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2p \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$V = 2p \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{8}{3} p$$

6. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بین سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ حول خط $x = 2$ ایجاد می شود.

(حل)

$$V = p \int_0^4 \left(\left(2 - \frac{y}{2} \right)^2 - (2 - \sqrt{y})^2 \right) dy$$

$$V = p \int_0^4 \left(-2y + \frac{y^2}{4} + 2\sqrt{y} - y \right) dy$$

$$V = p \left(\frac{y^3}{12} + \frac{4}{3} y \sqrt{y} - \frac{3}{2} y^2 \right) \Big|_0^4 = p \left(\frac{64}{12} + \frac{32}{3} - 24 \right)$$

$$V = \left| p \left(\frac{48}{3} - \frac{72}{3} \right) \right| = 8p$$

7. یک دیسک به شعاع و به مرکز $(b, 0)$ که $b \leq a \leq 0$ حول محور y ها دوران می کند و یک چنبره تولید می کند حجم جسم آن را تعیین کنید.

(حل)

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{a^2 - (x-b)^2}$$

$$V = 4p \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x-b)^2} dx = 4p \int_{-a}^a (x+b) \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 4p \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx + 4p \int_{-a}^a b \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= 8p b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8p \times \frac{p a^2}{4} = 2p^2 a^2 b.$$

8. ناحیه مثلثی $y = x$, $y = 0$, $x = a > 0$ حول خط $x = b > a$ دوران می کند و

جسمی پدید می آورد. حجم جسم به دست آمده را حساب کنید.

(حل)

$$V = p \int_0^a ((b-y)^2 - (b-a)^2) dy$$

$$V = p \left(\frac{(y-b)^3}{3} - (b-a)^2 y \right) \Big|_0^a = p \left(\frac{(a-b)^3}{3} - a(b-a)^2 \right)$$

فصل یازدهم

صورت‌های مبهم و انتگرال

های ناسره

تمرین صفحه ۵۱۹ .

۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} x}{\operatorname{tg}^{-1} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin^2 t}{t-p} = \lim_{t \rightarrow p} \frac{\sin 2t}{1} = 0$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos 3x}{p-2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sec^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos 2x}{2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x} = +\infty$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(2\operatorname{tg}^{-1} x - p) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\operatorname{tg}^{-1} x - p}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -2$$

$$6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{te^{at}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{at} - 1}{te^{at}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ae^{at}}{e^{at} + ate^{at}} = a$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sin^2 x \operatorname{Ln} x} = e^0 = 1$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin t - \sin 3t}{3\operatorname{tg} t - \operatorname{tg} 3t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos t - 3\cos 3t}{3\sec^2 t - 3\sec^2 3t}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin t + 3\sin 3t}{2\sec^2 t \cdot \operatorname{tg} t - 6\sec^2 3t \cdot \operatorname{tg} 3t} = -\frac{8}{16}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1}{x^{\frac{2}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(e^x) - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln e + \ln x - 1}{\sin p x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{p \cos p x} = \frac{-1}{p}$$

$$11) \quad \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\ln \sin r}{\cos r} = \lim_{r \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cot r}{-\sin r} = 0$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}} = 1$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$14) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\cos 2t)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos 2t}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{-2 \tan 2t}{2t}} = e^{-2}$$

مشتق f دو بار مشتق

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad ۱۵.$$

پذیر باشد.

(حل)

$$\text{حد} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - 2f'(x) + f'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - 2f''(x) + f''(x-h)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n x^k - n}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \frac{1-x^n}{1-x} - n}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^n - 1) - n(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^n - 1 - n}{2(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{1-x+L \circ g x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x \ln x} - x}{1-x-L \circ g x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1+\ln x) e^{x \ln x} - 1}{-1 + \frac{1}{L \ln 1} \cdot \frac{1}{x}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 2x - 2 \sin^{-1} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times (-\frac{1}{2})(-8x) - 2 \times (-\frac{1}{2})(-2x)}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}} - (1-x^2)^{\frac{3}{2}} 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x - 2x}{6x} = \frac{8-2}{6} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} (a \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x}}{a} - b \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x}}{b}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1+\frac{x}{a^2}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1+\frac{x}{b^2}}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2})}{3x} \\
 &= \frac{1}{3} (\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{\sqrt{x+a}}} = \frac{1}{\frac{2}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

۲. ثابت های a و b را طوری تعیین کنید که :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt &= 1 \\
 \text{حد} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b - \cos x} &= 1 \Rightarrow b=1, a=4
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. تابع f در بازه $[-1,1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

نوع و مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 f(x) dx$ را تعیین کنید.

(حل) انتگرال ناسره نوع دوم است و مقدار آن برابر زیر است

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

۲. نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ همگراست، اگر $p > 1$

باشد

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

اگر $p > 1$ ، توان x در صورت منفی است پس در این حالت

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{1-p}$$

۳. مقداری برای n پیدا کنید که به ازای آن انتگرال

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$
 همگرا باشد.

به ازای مقدار n بدست آمده انتگرال را حساب کنید.

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln(t+1)^n - \frac{3}{4} \ln(2t^2+n) \right) - A$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{(t+1)^n}{(2t^2+n)^{\frac{3}{4}}} - A$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow n = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$I = \ln \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - \ln \frac{\sqrt{8}}{(\frac{7}{2})^{\frac{3}{4}}}$$

۴) نوع انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ را تعیین کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad , \quad \frac{1}{(1+x^2)^3} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \text{چون}$$

همگراست، طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

۵) نوع انتگرال $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x \, dx$ را تعیین کنید.

$$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \sec x \, dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} \int_{\frac{p}{4}}^t \sec x \, dx = \lim_{t \rightarrow \frac{p}{2}^-} \ln |\sec t + \tan t| - A$$

$$t \rightarrow \frac{p}{2}^- \quad t \rightarrow \frac{p}{2}^- \\ = +\infty$$

انتگرال واگراست.

۶. به ازای مقادیر مختلف n نوع انتگرال های زیر را بررسی کنید:

الف) $I = \int_0^1 x^n \, dx$ برای $n > -1$ همگرا و برای $n \leq -1$ واگراست.

$$I = \int_0^1 x^n \ln^2 x \, dx \quad (\text{ب})$$

۷. نوع انتگرال های زیر را تعیین کنید.

(الف) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ و اگر است چون $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ و می

دانیم $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ و اگر است.

(ب) $\int_0^1 \frac{dx}{x \cos x}$ و اگر است چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x \cos x}}{\frac{1}{x}} = 1$ و $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

و اگر است، طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال داده شده و اگر است.

(ج) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln x}$ ، همگراست، زیرا داریم: $\frac{1}{x^2 + \ln x} \leq \frac{1}{x^2}$ و

انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه انتگرال داده شده همگراست.

(د) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

برای $0 < x < 1$ داریم $x^3 < x^2$ پس $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

اما انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ همگراست، طبق آزمون مقایسه

انتگرال داده شده همگراست.

(ه) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} \, dx$ همگراست، چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$ اما انتگرال

همگراست، پس انتگرال داده شده همگراست. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(و) $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ و اگر است. چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{x}} = 1$ اما انتگرال

و اگر است. پس طبق آزمون مقایسه حدی انتگرال $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{dx}{x}$ و اگر است.

۸. فرض کنید $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، در این صورت ثابت کنید.

(الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{p}$ (ب) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{4}$ (حل)

$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$

(الف) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p}$

(ب) از روش جز به جز استفاده می کنیم.

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-x^2} dx = \left. \frac{-x}{2} e^{-x^2} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{p}}{2} = \frac{\sqrt{p}}{4}$$

۹. تابعی نظیر f طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ واگرا ولی

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) dx = 0$.

(حل) تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ را در نظر بگیرید.

۱۰. ثابت کنید انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^t dx$ به ازای هر t حقیقی همگراست.

(حل) چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^t e^{-x}}{e^{-2x}} = 0$ و انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-2x} dx$ همگراست. پس

انتگرال داده شده همگراست.

۱۱. تابع گاما. $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{s-1} dt$ تابع گاما است.

ثابت کنید.

(الف) تابع $\Gamma(s)$ به ازای هر $s > 0$ همگراست.

(حل) با توجه به تمرین ۱۰ این تابع برای هر s همگراست.

(ب) نشان دهید $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^x dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + \Gamma(x)$$

(ج) $\Gamma(n+1) = n!$.

(حل) طبق قسمت ب داریم:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1+1) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

(د) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{2}$ ، نشان دهید

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2} , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{p}}{2} \quad (\text{حل})$$

تساوی اخیر از تمرین ۸ بدست می آید.

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{p}$$

۱۲. نوع انتگرال های زیر را معلوم کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} \quad \text{این انتگرال واگراست چون} \quad \int_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{الف})$$

طبق آزمون مقایسه چون انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ واگراست، انتگرال

بزرگتر واگراست.

$$\frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{x^3} \quad \text{انتگرال همگراست چون} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx \quad (\text{ب})$$

و انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ همگراست. طبق آزمون مقایسه انتگرال داده

شده همگراست.

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

فصل دوازدهم

اعداد مختلط

تمرین صفحه ۵۳۵ .

۱. جوابهای حقیقی معادله زیر را بیابید.

(حل)

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$$

$$(4x + 5y) + (2x - 3y)i = 13 + i$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, \quad x = 2$$

۲. حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} \text{الف) } Z &= \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} = \frac{(5+5i)(4+3i)+20(3-4i)}{(3-4i)(4+3i)} \\ &= \frac{5+35i+60-80i}{24-7i} = \frac{65-45i}{24-7i} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{(1+i)(1+2i)}{1-i} + i = \frac{-1+3i+1+i}{1-i} = \frac{4i}{1-i} = \frac{4i(1+i)}{2} = -2+2i$$

$$\text{ج) } \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = \frac{3(i^2)^{15} - (i^2)^9 i}{2i-1} = \frac{-3+i}{2i-1} = \frac{-3}{5} - \frac{1}{5}i$$

۳. جواب دستگاه زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} (1+i)Z_1 - iZ_2 = 2+i \\ (2+i)Z_1 + (2-i)Z_2 = 2i \end{cases}$$

(حل) از روش کرامر استفاده می کنیم.

$$Z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2+i & -i \\ 2i & 2-i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & -i \\ 2+i & 2-i \end{vmatrix}} = \frac{5-2}{3+i-1+2i} = \frac{3}{3i-2}$$

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 2+i & 2i \end{vmatrix}}{3i-2} = \frac{2i-2-3-4i}{3i-2} = \frac{-5-2i}{3i-2}$$

تمرین صفحه ۵۲۷ .

فرض کنید $a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = 0$ که در آن

برای $a_i \in R$, $0 \leq i \leq n$ ، ثابت کنید $\bar{Z}$ ریشه معادله فوق است.

(حل)

$$\overline{a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0} = \overline{0}$$

$$\bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0 = 0$$

$$a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = 0$$

پس $\bar{Z}$ ریشه معادله است.

تمرین صفحه ۵۲۸ .

۱. فرض کنید $Z_1, Z_2 \in R$, $Z_2 \neq 0$ ثابت کنید

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

(حل)

$$\begin{aligned}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) &= (Z_1 Z_2^{-1}) = Z_1 \bar{Z}_2^{-1} \\ &= \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^{-1} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}\end{aligned}$$

۲. عبارات زیر را ساده کنید.

الف)
$$\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$$

$$= \frac{(8-i)(1+2i)}{1-2i+i^2} = \frac{10+15i}{-2i} = -\frac{15}{2} + 5i$$

ب)
$$\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}} = \frac{1+i+1}{2-i-1+i} = 2+i$$

ج)
$$\begin{aligned}3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 &= 3\left(\frac{2i}{-2i}\right) - 2\left(\frac{2i}{-2i}\right)\left(\frac{1-i}{1+i}\right) \\ &= -3 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -3-i\end{aligned}$$

۳. درستی های زیر را ثابت کنید.

الف) $Z + \bar{Z} = 2\operatorname{Re}(Z)$

حل) $(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im}(Z)i) + (\operatorname{Re}(Z) - \operatorname{Im}(Z)i) = 2\operatorname{Re}(Z)$

ب) $Z - \bar{Z} = 2\operatorname{Im}(Z)i$

$(\operatorname{Re}(Z) + \operatorname{Im} Z i) - (\operatorname{Re} Z - \operatorname{Im} Z i) = 2\operatorname{Im}(Z)i$

۴. با فرض $Z = x + yi \neq 0$ نمودار $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}$ را رسم

کنید.

حل)

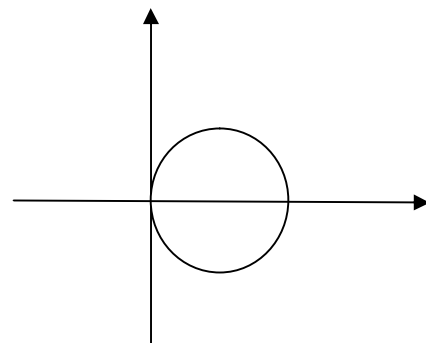
فصل دوازدهم: اعداد مختلف

۵

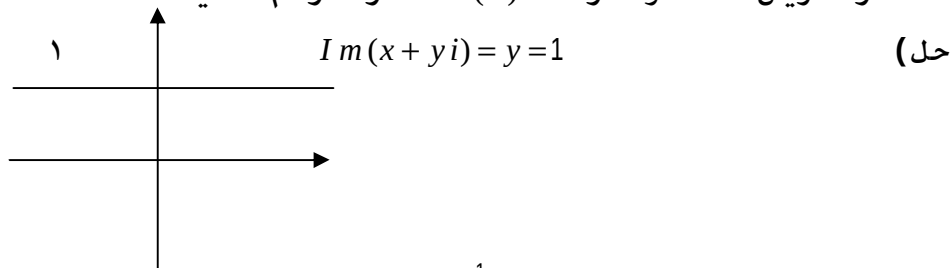
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



۵. در تمرین ۴ نمودار $\operatorname{Im}(Z)=1$ را رسم کنید.



۶. فرض کنید $\sum_{k=0}^{100} i^k = x+yi$ ، در این صورت

x, y را محاسبه کنید.

(حل) طبق تصاعد هندسی داریم:

$$\sum_{k=0}^{100} i^k = \frac{1-i^{101}}{1-i} = \frac{1-i}{1-i} = 1 = x+yi \Rightarrow x=1, y=0$$

۷. اگر $\frac{x+yi}{x-yi} = x-yi$ مقادیر حقیقی x و y را

بیابید.

(حل)

$$x + yi = (x - yi)^2 = x^2 + (-yi)^2 - 2x yi$$

$$= (x^2 - y^2) - 2x yi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ -2xy = y \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$y \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۸. اگر f یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد؛

نشان دهید. $\overline{f(Z)} = f(\bar{Z})$

$$f(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0$$

$$\overline{f(Z)} = \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0$$

$$= \bar{a}_n \bar{Z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \bar{Z} + \bar{a}_0$$

$$= a_n \bar{Z}^n + a_{n-1} \bar{Z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{Z} + a_0 = f(\bar{Z})$$

تمرین صفحه ۵۴۰ .

فرض کنید $Z_2 = a_2 + b_2 i$, $Z_1 = a_1 + b_1 i$ با در نظر گرفتن

نمایش هندسی اعداد Z_1, Z_2 , ثابت کنید

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

(حل) اگر Z_2, Z_1 را به صورت بردار

(a_1, b_1) , (a_2, b_2) در نظر بگیریم، آنگاه

$$. Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

و این خاصیت از جمع بردارها در R^2 نتیجه می شود.

تمرین صفحه ۵۴۳ .

۱. فرض کنید $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ اعداد مختلط باشند. در

این صورت خواص زیر برقرارند.

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1| |Z_2| \dots |Z_n| \quad (\text{الف})$$

(حل) با استفاده از استقراء داریم:

$$|Z_1 Z_2 \dots Z_n| = |Z_1 (Z_2 Z_3 \dots Z_n)| = |Z_1| |Z_2 Z_3 \dots Z_n| = |Z_1| |Z_2| \dots |Z_n|$$

$$|Z^n| = |Z|^n \quad (\text{ب})$$

(حل) کافی است در قسمت قبل قرار دهیم:

$$Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z$$

$$\operatorname{Re}(Z) \leq |Z| \quad (\text{ج})$$

(حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |Z| \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) \leq |Z|$$

$$|Z| = |\bar{Z}| \quad (\text{د})$$

(حل) اگر قرار دهیم:

$$Z = x + yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x - yi| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} \Rightarrow |Z| = |\bar{Z}|$$

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2| \quad (\text{ه})$$

(حل) اگر Z_1, Z_2 را به عنوان دو بردار در

R^2 در نظر بگیریم داریم:

$$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos \theta$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| = (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

$$\Rightarrow |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

$$|Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + \dots + |Z_n| \quad (\text{و})$$

۸ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

حل) با استقراء و استفاده از قسمت (ه) مطلب ثابت می شود.

$$\begin{aligned} |Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n| &= |Z_1 + (Z_2 + \dots + Z_n)| \\ &\leq |Z_1| + |Z_2 + \dots + Z_n| \leq |Z_1| + |Z_2| + \dots + |Z_n| \end{aligned}$$

$$|Z_1 - Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad \text{یا} \quad |Z_1 + Z_2| \geq |Z_1| - |Z_2| \quad (\text{ز})$$

حل)

$$\begin{aligned} |Z_1| &= |(Z_1 + Z_2) + (-Z_2)| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \leq |Z_1 + Z_2| + |Z_2| \\ \Rightarrow |Z_1| - |Z_2| &\leq |Z_1 + Z_2| \end{aligned}$$

اگر Z_2 را به $-Z_2$ تبدیل کنیم داریم:

$$|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$$

۲. اگر $Z_1 = 2 + i$ و $Z_2 = 3 - 2i$ و $Z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ اعداد

مختلط باشند؛ هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

$$|3Z_1 - 4Z_2| \quad (\text{الف})$$

$$3Z_1 - 4Z_2 = -6 + 11i \Rightarrow |3Z_1 - 4Z_2| = \sqrt{157} \quad (\text{حل})$$

$$A = \left| \frac{2Z_2 + Z_1 - 5 - i}{2Z_1 - Z_2 + 3 - i} \right|^3 \quad (\text{ب})$$

حل)

$$2Z_2 + Z_1 - 5 - i = 3 - 4i$$

$$2Z_1 - Z_2 + 3 - i = 4 + 3i$$

$$\Rightarrow A = \frac{|3 - 4i|^3}{|4 + 3i|^3} = \frac{(\sqrt{25})^3}{\sqrt{25}^3} = 1$$

۳. آرگومان اصلی و طول اعداد زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف)} \quad 1-i \Rightarrow |1-i|=\sqrt{2}, \quad \text{Arg}(1-i)=-\frac{p}{4}$$

$$\text{ب)} \quad -1+i \Rightarrow |-1+i|=\sqrt{2}, \quad \text{Arg}(-1+i)=\frac{3p}{4}$$

$$\text{ج)} \quad 1 \Rightarrow |1|=1, \quad \text{Arg}(1)=0$$

$$\text{د)} \quad 2i \Rightarrow |2i|=2, \quad \text{Arg}(2i)=\frac{p}{2}$$

۴. فرض کنید $Z = x + yi$ و $|Z - 1 + i| = 1$ ، مکان Z را تعیین کنید.
(حل)

$$\begin{aligned} Z - 1 + i &= (x - 1) + (y + 1)i \\ \Rightarrow |Z - 1 + i| &= \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

مکان دایره ای به مرکز $C(1, -1)$ و شعاع $R=1$ است.

۵. مکان هندسی نقاط $Z = x + yi$ را در حالات زیر تعیین کنید.

$$\text{الف)} \quad |Z + 1| = |Z - 1|$$

(حل)

$$\begin{aligned} |(x + 1) + yi| &= |(x - 1) + yi| \\ \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} &= \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \Rightarrow (x + 1)^2 = (x - 1)^2 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۱۰

$$|Z+i|=|Z-1| \quad \text{ب)}$$

حل)

$$\begin{aligned} |x+(y+1)i| &= |(x-1)^2+y^2| \\ \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ \Rightarrow x^2+y^2+2y+1 &= x^2-2x+1+y^2 \\ \Rightarrow 2y &= -2x \quad \Rightarrow y = -x \end{aligned}$$

۶. نشان دهید که

$$|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$$

حل)

$$\begin{aligned} |Z_1|^2+|Z_2|^2+2|Z_1||Z_2|\cos q &+ |Z_1|^2+|Z_2|^2-2|Z_1||Z_2|\cos q \\ &= 2(|Z_1|^2+|Z_2|^2) \end{aligned}$$

۷. فرض کنید Z_3, Z_2, Z_1 سه عدد مختلط نا صفر باشند به طوری که:

$$Z_1+Z_2+Z_3=0, \quad |Z_1|=|Z_2|=|Z_3|$$

ثابت کنید.

$$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=0 \quad \text{ب)} \quad \frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=0 \quad \text{الف)}$$

حل) الف) رابطه $Z_i\bar{Z}_i=|Z_i|^2$ را در نظر بگیرید داریم

$$\bar{Z}_i = \frac{|Z_i|^2}{Z_i}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 &\Rightarrow \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{|Z_1|^2}{Z_1} + \frac{|Z_2|^2}{Z_2} + \frac{|Z_3|^2}{Z_3} = 0 \\
&\Rightarrow |Z_1|^2 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) = 0
\end{aligned}$$

ب) طبق قسمت الف، با خرج مشترک گیری داریم:

$$\frac{Z_2 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 Z_2 Z_3} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 Z_2 Z_3} = 0$$

$$\Rightarrow Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \Rightarrow (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + 2(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) = 0 \Rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0$$

۸. معادله زیر را بر حسب تابع مزدوج بیان کنید.

$$2x + y = 5$$

$$Z = x + yi, \bar{Z} = x - yi \Rightarrow Z + \bar{Z} = 2x, \bar{Z} - Z = 2yi$$

$$\Rightarrow (Z + \bar{Z}) + \frac{Z - \bar{Z}}{2i} = 5$$

۹. هر عدد که ریشه معادله ای به فرم زیر باشد:

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_1 Z + a_0 = 0$$

که در آن $a_i \in R$ ، یک عدد جبری نام دارد.

ثابت کنید $Z = \sqrt[3]{4} - 2i$ جبری است.

(حل)

$$\begin{aligned}
Z + 2i = \sqrt[3]{4} &\Rightarrow (Z + 2i)^3 = 4 \\
&\Rightarrow Z^3 + 6Z^2i - 12Z - 8i = 4 \\
&\Rightarrow Z^3 - 12Z - 4 = (8 - 6Z^2)i \\
&\Rightarrow (Z^3 - 12Z - 4)^2 = 6Z^2 - 8 \\
Z^6 + 144Z^2 + 16 - 24Z^4 - 8Z^3 + 96Z - 6Z^2 + 8 &= 0
\end{aligned}$$

پس Z عدد جبری است.

۱۰. نشان دهید که اگر $|Z|=1$ ، آنگاه برای هر دو عدد مختلط a, b که حداقل یکی از آنها مخالف صفر است داریم:

$$\left| \frac{aZ + b}{\bar{b}Z + \bar{a}} \right| = 1$$

$$\begin{aligned}
|aZ + b| &= \left| Z \left(a + \frac{b}{Z} \right) \right| = |Z| \left| a + \frac{b\bar{Z}}{|Z|^2} \right| \\
&= |a + b\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}\bar{Z}| = |\bar{a} + \bar{b}Z| \quad (\text{حل}) \\
&\Rightarrow \frac{|aZ + b|}{|\bar{a} + \bar{b}Z|} = \frac{|aZ + b|}{|\bar{a} + \bar{b}Z|} = 1
\end{aligned}$$

۱۱. اگر $Z = x + yi$ نشان دهید که:

$$|\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)| \leq \sqrt{2}|Z|$$

(حل)

$$2|Z|^2 = 2(\sqrt{|\operatorname{Re}(Z)|^2 + |\operatorname{Im}(Z)|^2})^2$$

$$= 2(|\operatorname{Re}(Z)|^2 + |\operatorname{Im}(Z)|^2) \geq (|\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)|)^2$$

$$\Rightarrow |\operatorname{Re}(Z)| + |\operatorname{Im}(Z)| \leq \sqrt{2}|Z|$$

۱۲. نشان دهید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ اگر و تنها اگر

$$|Z_2| = 1, |Z_1| = 1$$

(حل) فرض کنید $|Z_1| = |Z_2| = 1$ باشد آنگاه

$$|Z_1 - Z_2| = \left| Z_1 \left(1 - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right| = |Z_1| \left| 1 - \frac{Z_2 \bar{Z}_1}{|Z_1|^2} \right| = |1 - Z_2 \bar{Z}_1|$$

حال فرض کنید $|Z_1 - Z_2| = |1 - \bar{Z}_1 Z_2|$ باشد. تساوی بالا را

به صورت برعکس ادامه دهید .

۱۳. فرض کنید $Z \neq 0$ عدد مختلط باشد. ثابت کنید

$$|Z| = 1 \text{ اگر و تنها اگر } Z = \frac{1}{\bar{Z}}$$

(حل) اگر $|Z| = 1$ آنگاه $Z \bar{Z} = |Z|^2 = 1$ پس $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$.

اگر $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$ آنگاه $|Z|^2 = Z \bar{Z} = 1$ پس $|Z| = 1$.

۱۴. مکان عدد مختلط Z را چنان پیدا کنید که اعداد

مختلط Z, iZ, i همواره بر یک استقامت باشند.

(حل)

$$\frac{z - iZ}{Z - i} = \frac{iZ - i}{iZ - Z} \Rightarrow -(Z - iZ)^2 = i(Z - 1)(Z - i)$$

$$\Rightarrow -Z^2 + 2iZ^2 + Z^2 = iZ^2 = Z = 1 - iZ$$

$$i(Z^2 + Z) = Z + 1 \Rightarrow iZ = 1$$

$$x = 0, \quad -y = 1, \quad y = -1$$

پس $Z = 0, Z = i, Z = -i$ بر یک استقامتند.

۱۴ حل المسائل ریاضی عمومی (۱)

۱۵. اگر C, A اعداد حقیقی و

$$AZ\bar{Z} + DZ + D\bar{Z} + C = 0, \quad Z = x + yi, \quad D = a + ib, \quad AC < 0$$

و نشان دهید مکان Z دایره ای به مرکز $(-\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$

شعاع آن به صورت زیر است.

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

(حل)

$$AZ\bar{Z} = A(x^2 + y^2)$$

$$DZ + D\bar{Z} = 2\operatorname{Re}(DZ) = 2(ax - by)$$

$$\Rightarrow Ax^2 + Ay^2 + 2ax - 2by + C = 0$$

$$\Rightarrow A(x + \frac{a}{A})^2 + A(y - \frac{b}{A})^2 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{A^2} + C = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{a}{A})^2 + (y - \frac{b}{A})^2 = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}$$

مرکز دایره

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2} - \frac{C}{A}}, \quad (-\frac{a}{A}, \frac{b}{A})$$

۱۶. معادله خط $Ax + By + C = 0$ را به شکل مختلط

بنویسید.

$$A \frac{Z + \bar{Z}}{2} + B \frac{Z - \bar{Z}}{2i} + C = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۷. معادله دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ را به

فرم مختلط بنویسید.

$$Z\bar{Z} + Z + \bar{Z} + i(Z - \bar{Z}) = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۸. اگر Z_1, Z_2 دو عدد مختلط باشند، به طوری که $|Z_1 - Z_2| = |Z_1 + Z_2|$ ثابت کنید اختلاف آرماگون های

Z_1, Z_2 برابر $\frac{p}{2}$ است.

(حل)

$$|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1 + Z_2|^2 \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|\cos q$$

$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2|Z_1||Z_2|\cos a$$

$$\Rightarrow 4|Z_1||Z_2|\cos q = 0 \Rightarrow q = \frac{p}{2}$$

۱۹. فرض کنید $a, b \in \mathbb{C}$ دو عدد حقیقی نابرابر باشند.

نشان دهید اگر $|Z + ai| = |Z + bi|$ آنگاه

$$Z - \bar{Z} = -(a+b)i$$

(حل)

$$Z = x + yi \Rightarrow x^2 + (y+a)^2 = x^2 + (y+b)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ay = 2by + b^2$$

$$(2a - 2b)y = b^2 - a^2 \Rightarrow y = -\frac{a+b}{2}$$

$$Z - \bar{Z} = 2yi = -(a+b)i$$

تمرین صفحه ۵۴۶.

اعداد زیر را به صورت مثلثاتی نمایش دهید:

الف) $Z_1 = -3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5p}{6} + i \sin \frac{5p}{6} \right)$

ب) $Z_2 = \frac{(i-1)^2}{i} = \frac{-2i}{i} = -2 = 2(\cos p + i \sin p)$

ج) $Z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \left(-\frac{p}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{p}{3} \right) \right)$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

ثابت کنید دستور دمو آور برای $n < 0$ صحیح نیز برقرار است.

حل) اگر قرار دهیم $e^{iq} = \cos q + i \sin q$, $n = -m$ باشد آنگاه

$$Z = e^{iq} \Rightarrow Z^{-m} = e^{-imq} = \cos(-mq) + i \sin(-mq) \\ \Rightarrow n < 0 \quad \Rightarrow (\cos q + i \sin q)^n = \cos(nq) + i \sin(nq)$$

تمرین صفحه ۵۴۷ .

اگر Z_1, Z_2 دو عدد مختلط باشند و $Z_2 \neq 0$ ، ثابت کنید

$$\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

حل)

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= |Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1) \quad , \quad Z_2 = |Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2) \\
 \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{|Z_1|(\cos q_1 + i \sin q_1)}{|Z_2|(\cos q_2 + i \sin q_2)} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos q_1 + i \sin q_1)(\cos q_2 + i \sin q_2) \\
 \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{|Z_1|}{|Z_2|}(\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2)) \\
 \Rightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) &= \theta_1 - \theta_2 = \operatorname{Arg} Z_1 - \operatorname{Arg} Z_2 \\
 \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| &= \frac{|Z_1|}{|Z_2|}|\cos(q_1 - q_2) + i \sin(q_1 - q_2)| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۴۹ .

۱. ثابت کنید:

$$\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} a}{1 - i \operatorname{tg} a}\right)^n = \frac{1 + i \operatorname{tg} na}{1 - i \operatorname{tg} na}$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1 + i \operatorname{tg} a}{1 - i \operatorname{tg} a}\right)^n &= \left(\frac{1 + i \frac{\sin a}{\cos a}}{1 - i \frac{\sin a}{\cos a}}\right)^n = \left(\frac{\cos a + i \sin a}{\cos a - i \sin a}\right)^n \\
 &= \left(\frac{\cos a + i \sin na}{\cos na - i \sin na}\right) = \frac{1 + i \operatorname{tg} na}{1 - i \operatorname{tg} na}
 \end{aligned}$$

۲. فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد، حاصل

$$I = \frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} \text{ را محاسبه کنید.}$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 I &= (1+i)^n (1-i)^{2-n} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right)^n \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} - i \sin \frac{p}{4} \right)^{2-n} \\
 &= 2^{\frac{n}{2}} \times 2^{1-\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{4} \right) \left(\cos \frac{(2-n)p}{4} - i \sin \frac{(2-n)p}{4} \right) \\
 &= 2 \left(\cos \frac{np}{2} + i \sin \frac{np}{2} \right)
 \end{aligned}$$

۳. عدد مختلط $(1+i)^n$ را به دو طریق محاسبه و نتیجه را مقایسه کنید.

(حل)

$$\begin{aligned}
 (1+i)^2 &= 2i \quad \Rightarrow n=2k \quad \Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k \\
 n &= 2k+1 \quad \Rightarrow (1+i)^n = (2i)^k (1+i)
 \end{aligned}$$

۵. ثابت کنید.

$$\frac{\sin 4q}{\sin q} = 2 \cos 3q + 6 \cos q - 4$$

(حل)

$$\begin{aligned}
 Z &= \cos q + i \sin q \quad \Rightarrow Z^4 = \cos 4q + i \sin 4q \\
 ((\cos^2 q - \sin^2 q) + 2 \sin q \cos q i)^2 &= \cos 4q + i \sin 4q \\
 (\cos 2q + \sin 2q i)^2 &=
 \end{aligned}$$

تمرین صفحه ۵۵۶.

۱- معادله $Z^2 + (2i-3)Z + 5-i = 0$ را حل کنید.

(حل)

$$\begin{aligned} \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= i-5 - \frac{(2i-3)^2}{4} \\ \left(Z + \frac{2i-3}{2}\right)^2 &= \frac{4i-20+4+6i-9}{4} = \frac{10i-25}{4} \\ Z &= \frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{10i-25} \end{aligned}$$

۲- فرض کنید $(Z \neq 1)$. در این صورت معادله زیر را حل کنید:

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 + Z^5 = 0$$

(حل) دو طرف را در $(1-Z)$ ضرب می کنیم .

$$1 - Z^6 = 0 \Rightarrow Z^6 = 1$$

$$W_i = \cos\left(\frac{kp}{3}\right) + i \sin\left(\frac{kp}{3}\right)$$

$$W_0 = 1, \quad W_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad W_3 = -1$$

$$W_4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad W_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ریشه $Z=1$ قابل قبول نیست. چون با ضرب $1-Z$ تولید شده است.

۳. اگر W یکی از ریشه های موهومی، n ام واحد باشد. نشان دهید:

$$1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = 0$$

(حل)

حل المسائل ریاضی عمومی (۱) ۲۰

$$\begin{aligned} W \neq 1, \quad W^n = 1 &\Rightarrow W^n - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (W - 1)(W^{n-1} + W^{n-2} + \dots + W + 1) = 0 \\ W \neq 1 &\Rightarrow 1 + W + W^2 + \dots + W^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

۴. معادله زیر را حل کنید:

$$iZ^3 + 8 = 0$$

(حل)

$$-Z^3 + 8i = 0 \Rightarrow Z^3 = 8i$$

$$r = 8, \quad q = \frac{p}{2}$$

$$W_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{p}{2}}{3} \right)$$

$$W_0 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$W_1 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$W_3 = -2i$$

۵. ریشه های هر یک از اعداد زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } (-1+i)^{\frac{1}{3}}, \quad r = \sqrt{2}, \quad q = \frac{3p}{4}$$

$$W_k = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{3p}{4}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11p}{12} + i \sin \frac{11p}{12} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[6]{2} \cos \frac{19p}{12} + i \sin \frac{19p}{12}$$

ب) $(-2\sqrt{3} - 2i)^{\frac{1}{3}}$, $r = 4$, $q = \frac{7p}{6}$

$$W_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} + i \sin \frac{2kp + \frac{7p}{6}}{3} \right)$$

$$W_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{7p}{24} + i \sin \frac{7p}{24} \right)$$

$$W_1 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{19p}{24} + i \sin \frac{19p}{24} \right)$$

$$W_2 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{31p}{24} + i \sin \frac{31p}{24} \right)$$

$$W_3 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{43p}{24} + i \sin \frac{43p}{24} \right)$$

۷. معادله $6Z^4 - 25Z^3 + 32Z^2 + 3Z - 10 = 0$ را حل کنید.

(حل) مقسوم علیه های -10 برابر ± 1 و ± 2 و ± 5 است.

مقسوم علیه های 6 برابر ± 1 و ± 2 و ± 3 است.

۱۰. معادله $(1+Z)^5 = (1-Z)^5$ را حل کنید.

(حل)

$$\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^5 = 1, \quad W^5 = 1, \quad W = \frac{Z+1}{Z-1}$$

$$W_0 = 1 \Rightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = 1 \Rightarrow Z_0 = 0$$

$$W_1 = \cos \frac{2p}{5} + i \sin \frac{2p}{5} = \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$$

$$W_2 = \cos \frac{4p}{5} + i \sin \frac{4p}{5} = \frac{1+Z_2}{1-Z_2}$$

$$W_3 = \cos \frac{6p}{5} + i \sin \frac{6p}{5} = \frac{1+Z_3}{1-Z_3}$$

$$W_4 = \cos \frac{8p}{5} + i \sin \frac{8p}{5} = \frac{1+Z_4}{1-Z_4}$$

۱۱. هر يك از عبارات زیر را ساده كنيد.

(الف)

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{6}} =$$

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{-i\frac{p}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{7p}{12}}$$

$$Z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} + i \sin \frac{2kp - \frac{7p}{12}}{6} \right)$$

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$$

$$\text{ب) } \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{p}{4}}}{2 e^{i\frac{p}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{5p}{12}}$$

$$Z_k = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2kp - \frac{5p}{12}}{6}\right) \right)$$

۱۲. معادله $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$ را حل کنید که در آن x عدد حقیقی است.

$$(x+i)^n - (x-i)^n = 0 \Rightarrow (x+i)^n = (x-i)^n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = 1$$

$$Z = \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow Z^n = 1$$

$$Z_k = \cos \frac{2kp}{8} + i \sin \frac{2kp}{8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{حل})$$

$$Z_k = \frac{x+i}{x-i} \Rightarrow x Z_k - i Z_k = x + i$$

$$x(Z_k - 1) = i(Z_k + 1)$$

$$x = i \frac{Z_k + 1}{Z_k - 1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

۱۳) منحنی ای بیابید که معادله اش

$$|Z+c| + |Z-c| = 2a \quad \text{باشد که در آن } a, c \text{ اعداد}$$

حقیقی مثبت اند به طوری که $a > c$.

(حل) طبق تعریف، معادله فوق، معادله یک بیضی است.

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

۱۴. معادله خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ را به شکل مختلط بنویسید.

$$A\left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right) + B\left(\frac{Z - \bar{Z}}{2i}\right) + C = 0 \quad (\text{حل})$$

۱۵. معادله دایره ای را بنویسید که از سه نقطه $1+i, 2i, 1-i$ می گذرد.

(حل) فرض کنید $Z_0 = x_0 + y_0 i$ مرکز دایره باشد پس:

$$\begin{aligned} |Z_0 - (1-i)| &= |Z_0 - (1+i)| = |Z_0 - 2i| \\ \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 &= (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 \Rightarrow y_0 = 0 \\ \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + 1 &= x_0^2 + 4 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 2 = x_0^2 + 4 \end{aligned}$$

مرکز دایره $C(-1, 0)$ است.

$$R = |(-1+0) - (1-i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$$

شعاع دایره برابر $R = \sqrt{5}$ است.

۱۶ (مکان Z در هر حالت تعیین کنید).

الف) $|Z - i| = 1$: دایره به مرکز $(0, +1)$ و شعاع $R = 1$.

ب) $|Z - 1 - i| = 1$: دایره به مرکز $(1, 1)$ و شعاع $R = 1$.

ج) $|Z - 2i| = \frac{1}{2}$: دایره به مرکز $(0, 2)$ و شعاع $R = \frac{1}{2}$.